Vorwort

Der vorliegende Einführungskurs in die Thematik der Tragwerke wurde für die beiden ersten Semester des Architekturstudiums entwickelt. Er wird in den weiteren Semestern fortgesetzt, in welchen die Tragwerke in Stahlbeton, Stahl, Holz, Mauerwerk sowie das Tragwerk Baugrund detaillierter behandelt werden. Dieser erste Band *Tragwerksentwurf I* beinhaltet den im 1. Semester behandelten Vorlesungsstoff und ist als Einheit mit dem zweiten Band *Tragwerksentwurf II* zu verstehen, welcher den Stoff des 2. Semesters beinhaltet.

Der Kurs basiert auf dem Buch *L'Art des Structures* von Prof. Dr. Aurelio Muttoni. Es handelt sich um eine vom Üblichen abweichende Methode, welche als Hauptwerkzeug die graphische Statik einsetzt. Das Vorgehen ermöglicht es, auf elegante Art und Weise die inneren Kräfte zu visualisieren, und fördert das Gefühl für die Zusammenhänge zwischen der zweckmässigen Form eines Tragwerkes und den wirkenden inneren Kräften. Der Schwerpunkt liegt somit stärker auf dem Tragwerksentwurf als auf der Tragwerksanalyse.

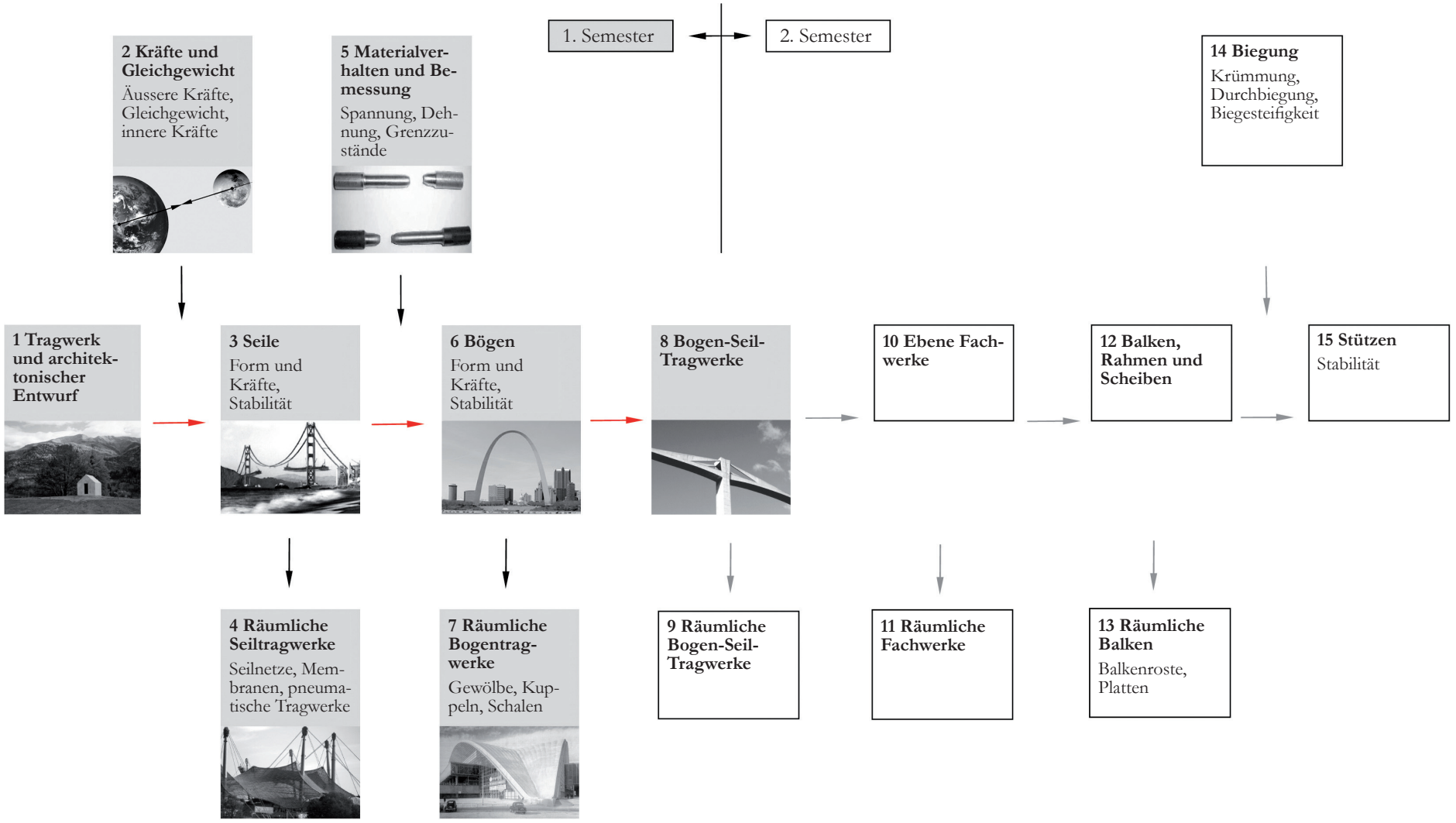
Um das Erreichen dieser Ziele zu erleichtern, wird vorwiegend ein intuitives Vorgehen befolgt. Der behandelte Stoff ist entlang eines Pfades organisiert. Nach der Einführung in die wesentlichen Grundlagen werden sukzessiv Seil- und Bogentragwerke, gemischte Bogen-Seiltragwerke, Fachwerke, Balken und schliesslich schlanke Stützen mit Hilfe der graphischen Statik untersucht. Im Anschluss an die Behandlung der jeweiligen, in der Ebene angeordneten Tragwerke werden die Form und die Tragwirkung der artverwandten räumlichen Tragwerke beschrieben.

Der Kurs verfolgt somit das Ziel, eine wahre Statik für Architekten zu sein und nicht eine Vereinfachung der Statik der Bauingenieure. Möge er allen Interessierten den Einstieg in die interessante Welt der Tragwerke erleichtern, den Dialog zwischen Architekten und Bauingenieuren fördern, und so zur Entwicklung von architektonischen Entwürfen beitragen, bei welchen die statischen und die gestalterischen Belange ineinander übergehen.

Bei der Konzeptfindung und Ausarbeitung des vorliegenden Manuskriptes wurde ich tatkräftig von meinem Oberassistenten Dr. Toni Kotnik unterstützt. An der Bearbeitung des Textes und der Bilder haben sich meine Assistenten Christoph Becker, Ali Kahrom, Thomas Kohlhammer, Mario Rinke und Christoph Schmid beteiligt. Ihnen sei an dieser Stelle für ihre Unterstützung bestens gedankt.

Zürich, im September 2008

Prof. Dr. Joseph Schwartz


1. Semester
2. Semester
2 Kräfte und Gleichgewicht
Äussere Kräfte, Gleichgewicht, innere Kräfte
5 Materialverhalten und Bemessung
Spannung, Dehnung, Grenzzustände
14 Biegung
Krümmung, Durchbiegung, Biegesteifigkeit
1 Tragwerk und architektonischer Entwurf
3 Seile
Form und Kräfte, Stabilität
6 Bögen
Form und Kräfte, Stabilität
8 Bogen-Seil-Tragwerke
10 Ebene Fachwerke
12 Balken, Rahmen und Scheiben
15 Stützen
Stabilität
4 Räumliche Seiltragwerke
Seilnetze, Membranen, pneumatische Tragwerke
7 Räumliche Bogentragwerke
Gewölbe, Kuppeln, Schalen
9 Räumliche Bogen-Seil-Tragwerke
11 Räumliche Fachwerke
13 Räumliche Balken
Balkenroste, Platten

Inhalt

1 Tragwerk und architektonischer Entwurf 1

1.1 Die Kapelle Oberrealta 1
1.2 Die Kapelle Sogn Benedetg 3
1.3 Das Picture Window House 4

2 Kräfte und Gleichgewicht 7

2.1 Die Kraft als vektorielle Grösse 7
2.2 Relevante Kraftarten für die Tragwerksanalyse 7
2.3 Gleichgewichtsbedingungen zweier Kräfte 8
2.4 Resultierende von zwei beliebig gerichteten Kräften 10
2.5 Resultierende von zwei parallelen Kräften 10
2.6 Gleichgewicht von drei beliebig gerichteten Kräften 12
2.7 Resultierende von drei und mehreren beliebig gerichteten Kräften 13
2.8 Resultierende von drei und mehreren parallelen Kräften 13
2.9 Innere Zugkräfte 14
2.10 Innere Druckkräfte 15

3 Seile 17

3.1 Tragwirkung eines Seiles unter einer konzentrierten Einzellast 17
3.2 Beeinflussung der inneren Kräfte durch Last und Geometrie des Tragwerks 19
3.3 Tragwirkung eines Seiles unter zwei vertikalen Lasten 20
3.4 Tragwirkung eines Seiles unter mehreren beliebig gerichteten Lasten 21
3.5 Tragwirkung eines Seiles unter gleichmässig verteilter Belastung 22
3.6 Tragwirkung eines Seiles unter seiner Eigenlast 24
3.7 Bauwerke mit an Seilen aufgehängten Bauteilen 24
3.8 Formänderungen des Tragseiles infolge ungleichmässig verteilter Nutzlasten oder Auflagerverschiebung 26
3.9 Massnahmen zur Begrenzung der Formänderungen infolge veränderlicher Lasten 27

4 Räumliche Seiltragwerke 33

4.1 Seilnetze 33
4.2 Zelte und Membranen 35
4.3 Begehbare pneumatische Membranen 36
4.4 Geschlossene pneumatische Membranen mit hohem Druck 37

5 Materialverhalten und Bemessung 39

5.1 Innere Kräfte und Verformungen im Tragelement 39
5.2 Steifigkeit eines Tragelementes 40
5.3 Innere Kräfte im Material 40
5.4 Verformungen und Steifigkeit des Materials 41
5.5 Durch Temperaturveränderungen bedingte Verformungen 42
5.6 Materialverhalten des Glases 42
5.7 Materialverhalten des Stahls 43
5.8 Materialverhalten des Aluminiums 45
5.9 Materialverhalten des Betons 45
5.10 Materialverhalten von Natursteinen 46
5.11 Materialverhalten des Holzes 46
5.12 Bemessung: Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit 47
5.13 Bemessung: Grenzzustand der Tragsicherheit 48
5.14 Ermüdung 50

6 Bögen 51

6.1 Duale Tragwerke 51
6.2 Gegenüberstellung einfacher Bogen- und Seiltragwerke 52
6.3 Historische Anwendungen 53
6.4 Tragwirkung eines Bogens unter mehreren beliebig gerichteten Lasten 55
6.5 Stabilitätsversagen des Bogens unter ungleichmässig verteilten Nutzlasten 55
6.6 Massnahmen zur Vermeidung eines Stabilitätsversagens unter veränderlichen Nutzlasten 56
6.7 Beeinflussung der inneren Bogenkräfte mittels Gelenken 59
6.8 Kreisförmige Mauerwerksbögen 61

7 Räumliche Bogentragwerke 63

7.1 Tonnengewölbe 63

7.2 Kreuzgewölbe 64

7.3 Klostergewölbe 66

7.4 Kuppeln mit auf die äusseren Lasten abgestimmten radialen Bögen 67

7.5 Kuppeln und weitere Tragwerke mit beliebig geformten radialen Bögen 69

7.6 Fächergewölbe 73

7.7 Schalen 73

7.8 Aufgelöste räumliche Bogentragwerke 78

8 Bogen-Seiltragwerke 81

8.1 Einfache Bogen-Seiltragwerke 81

8.2 Ermittlung der inneren Kräfte 83

8.3 Konsolartige Bogen-Seiltragwerke unter Einzellasten 86

8.4 Konsolartige Bogen-Seiltragwerke unter mehreren Lasten 87

8.5 Zusammengesetzte Bogen-Seiltragwerke 90

9 Räumliche Bogen-Seil-Tragwerke
10 Ebene Fachwerke
11 Räumliche Fachwerke
12 Balken, Rahmen und Scheiben
13 Räumliche Balken
14 Biegung
15 Stützen

Literatur 95

1 Tragwerk und architektonischer Entwurf

Jeder architektonische Entwurfsgedanke ist eng verbunden mit dessen Ausführungsvorstellung. Damit ein Entwurf ausführbar wird, müssen unter anderem die grundlegenden physikalischen Gesetze berücksichtigt werden. Zu diesen gehören zu einem wesentlichen Teil auch diejenigen der Baustatik. Ein architektonischer Entwurf, welcher durch seine Ausführung in ein Bauwerk umgesetzt wird, ist nicht ohne weiteres davor gefeit, einzustürzen oder sich auf Dauer infolge von Tragwerksmängeln unbefriedigend zu verhalten. Um sein Verhalten vernünftig planen und beurteilen zu können, ist es unumgänglich, ein Tragwerk unter Berücksichtigung der gestalterischen Belange ins Innere des Bauwerks hineinzudenken, dieses ebenfalls zu entwerfen.

Soll ein hervorragendes architektonisches Resultat erzielt werden, so ist es hilfreich, den Entwurf von Anfang an in Zusammenarbeit zwischen Tragwerksplaner und Architekt zu entwickeln, und das Tragwerk unter Berücksichtigung der gestalterischen Belange im Laufe des Entwurfsprozesses so weiter zu entwickeln, dass Tragwerk und architektonischer Entwurf sich gegenseitig ergänzen und vervollkommnen. Hier liegt ein grosses Potential für eine spannende Zusammenarbeit.



Bild 1.1: Kapelle St. Nepomuk, Oberrealta, 1993-94, Arch.: Rudolf Fontana & Partner, Entwurf: Christian Kerez, Ing.: Toni Cavigelli

Die beiden Aspekte der physikalischen Notwendigkeit und gestalterischen Freiheit spiegeln das typische Verhältnis, nämlich die Trennung, zwischen Ingenieur und Architekt wider. In diesem Kapitel wird anhand von drei ausgewählten Beispielen exemplarisch aufgezeigt, wie hochwertige Architektur entsteht, wenn die statischen und die gestalterischen Belange ineinander übergehen.

1.1 Die Kapelle Oberrealta

Die kleine Kapelle Oberrealta ist der erste gebaute Entwurf des Architekten Christian Kerez (Bild 1.1). Das im Jahre 1993 vom Architekturbüro Fontana und Partner ausgeführte Bauwerk ist ein kleines Einraumhaus, dessen Innenraum durch die gleiche Betonschale gebildet wird wie das äussere Volumen. Der Gebäudekörper ist mit dem architektonischen Raum identisch.

Am Rand eines Plateaus, oberhalb der fruchtbaren Ebene im Domleschg, besetzt die Kapelle in der Tradition der alpinen Gebetsnischen einen ausgezeichneten Ort in der Topographie im Dialog mit den Bergen und Schlössern der anderen Talseite. Die Vereinfachung der Form dieses aufs Minimum reduzierten Baukörpers begründet der durch die Betrachtungsweise der Zysterzienser beeinflusste Architekt mit der „überwältigenden Schönheit der Landschaft und der Armseligkeit jeglichen menschlichen Versuches, dieser Mächtigkeit etwas gegenüberzustellen".

Die materielle Umsetzung des vertrauten Archetypus Haus, wie er den frühchristlichen Kirchenbauten zugrunde liegt, irritiert: die Kapelle erscheint abstrakt und vermittelt gleichzeitig doch die Vertrautheit der kindlichen Strichzeichnung. Die kleine Kapelle Oberrealta wird so zum Monument, nicht ihrer Grösse oder Form wegen, sondern als begehbare Skulptur der „Urhütte".

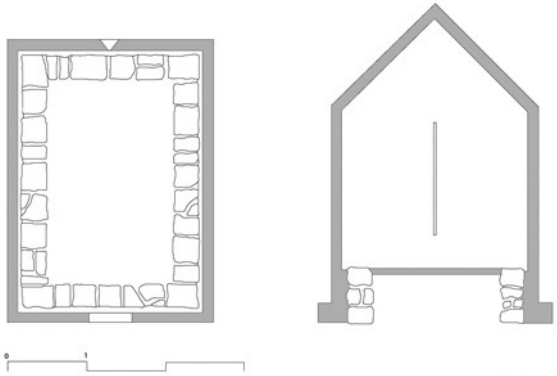


Bild 1.2: Grundriss und Schnitt, Kapelle St. Nepomuk, Oberrealta

Der reine Betonbau ist eine Hülle um die Grundmauern der ursprünglichen, zur Ruine verfallenen Kapelle (Bild 1.2). Er wurde mit Hilfe gängiger 50-cm Schaltafeln erstellt. Die Distanzhalter bleiben sichtbar (Bild 1.3). Die Zeit wird dem Baukörper sukzessiv die Patina der nahen Felsen und Burgen überziehen.

Der Innenraum ist ein Raum der Leere und der Ausblendung. Ein schmaler konischer Schlitz reduziert den Innenraum auf das Wesentliche und bringt gleichzeitig eine transzendentale Dimension ins Spiel, welche Schutz und Geborgenheit ausstrahlt (Bild 1.5).



Bild 1.3: Schalung, Kapelle St. Nepomuk, Oberrealta

Das Bauwerk erinnert an einen geschliffenen und ausgehöhlten Stein. Trotz seiner Einfachheit weist es ein inneres Tragwerk auf: ähnlich wie bei einem Kartenhaus besteht dieses aus einzelnen Scheiben und Platten (vgl. Kapitel 12 und 13), welche sich an ihren Kanten berühren. Ein wesentlicher Aspekt des Tragwerks liegt in der Art und Weise, wie diese Kanten miteinander verbunden sind. Das Kartenhaus fällt wegen des Fehlens dieser Verbindungen zusammen. Bei der Kapelle wurde als Baumaterial Stahlbeton eingesetzt, welcher vor Ort gegossen wurde (Bild 1.3). So wurde es möglich, die einzelnen Bauteile, d.h. die Streifenfundamente, die vier Wände und die beiden geneigten Dachplatten, in einem „Guss", das heisst monolithisch herzustellen. Nicht nur der Beton läuft bei den Verbindungen durch, sondern auch die eingelegten stählernen Bewehrungseisen. Der auf den ersten Blick als selbstverständlich anmutende Baukörper besitzt somit ein inneres Tragwerk, bestehend aus den Dachplatten, Wänden und Fundamenten, die im Innenraum wahrnehmbar artikuliert werden. Die Dachplatten stützen ihre Eigenlasten und allfällige Schneelasten auf die Wände ab. Die Wände geben zusätzlich zu den erwähnten Lasten ihre Eigenlasten auf die Streifenfundamente ab, welche, Füssen ähnlich, so ausgelegt sind, dass der Baugrund die gesamten Lasten aufzunehmen vermag. Dank der Verbindung der einzelnen Tragelemente ist der Baukörper tragfähig, und zwar nicht nur für Eigenlasten und Schneelasten, sondern auch für Horizontalkräfte, welche bei Wind oder bei einem Erdbeben auftreten (Kapitel 2). In der reduzierten Einfachheit des Tragwerks zeigt sich so die Idee der Urhütte, des archetypischen Hauses.



Bild 1.4: fertige Betonfläche, Kapelle St. Nepomuk, Oberrealta

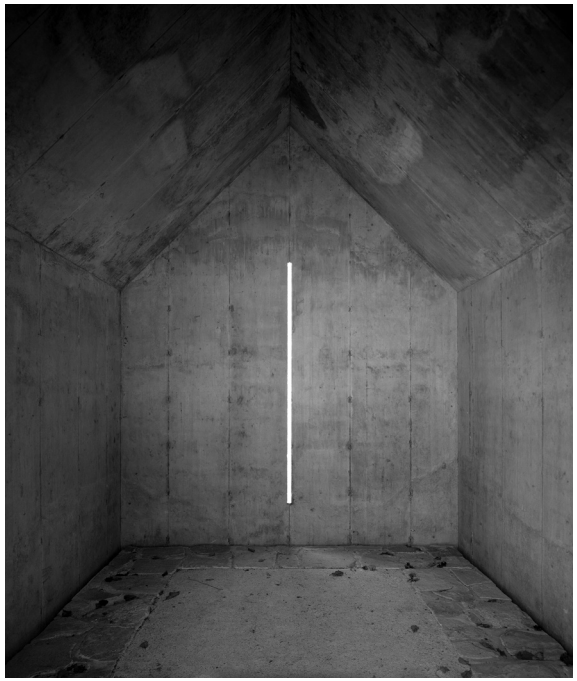


Bild 1.5: Innenraum, Kapelle St. Nepomuk, Oberrealta

1.2 Die Kapelle Sogn Benedetg

Das zweite ausgewählte Bauwerk steht ebenfalls in den Bergen, und ersetzt eine frühere kleine Kirche, welche 1984 durch eine Lawine zerstört wurde. Neu errichtet an einem geschützten Ort leicht oberhalb des Dorfes Sumvitg, liegt die von Peter Zumthor entworfene, mit Holzschindeln verkleidete Holzkapelle wie eine „Arche" an einem Bergweg am Steilhang (Bild 1.7). Wie bei seinen anderen Projekten hat sich der Architekt mit dem konkreten Ort auseinandergesetzt, um einen „in sich ruhenden" Baukörper zu entwerfen. Der Entwurf überzeugt durch seine Bildhaftigkeit und durch die Selbstverständlichkeit, mit der sich der Bau in der Landschaft behauptet. In Anlehnung an historische Kapellen wächst das turmartige Bauwerk ohne Sockel aus dem Steilhang heraus, nur die unten leicht abgeschrägte Verkleidung aus Schindelholz trennt das Bauwerk vom Boden.

Anders als bei der Kapelle von Christian Kerez besteht das Tragwerk aus aufgelösten Bauteilen. Das hat nur teilweise mit dem Baumaterial zu tun, denn es ist einerseits durchaus möglich, auch in Stahlbeton mit aufgelösten Bauteilen wie Stützen und Balken zu arbeiten, und andererseits gibt es auch zeitgenössische Holzbauwerke, welche mit Holzplatten konstruiert sind und somit kontinuierliche Oberflächen aufweisen, ohne jemals die äussere und innere Homogenität eines Stahlbetonbaus erreichen zu können.

Bei der Kapelle ist das nach innen gestülpte Tragwerk sehr sorgfältig auf den gestalterischen Ausdruck des Gebäudes abgestimmt: es besteht aus 37 frei stehenden Stützen (vgl. Kapitel 15), welche mit der gekrümmten Dachpfette und den zugehörigen Sparren ein sichtbares Skelett bilden durch welches der längliche Raum eine in die Höhe gerichtete Bewegung erhält (Bild 1.6 und 1.8). Eindrücklich ist die Sorgfalt, mit welcher der architek-

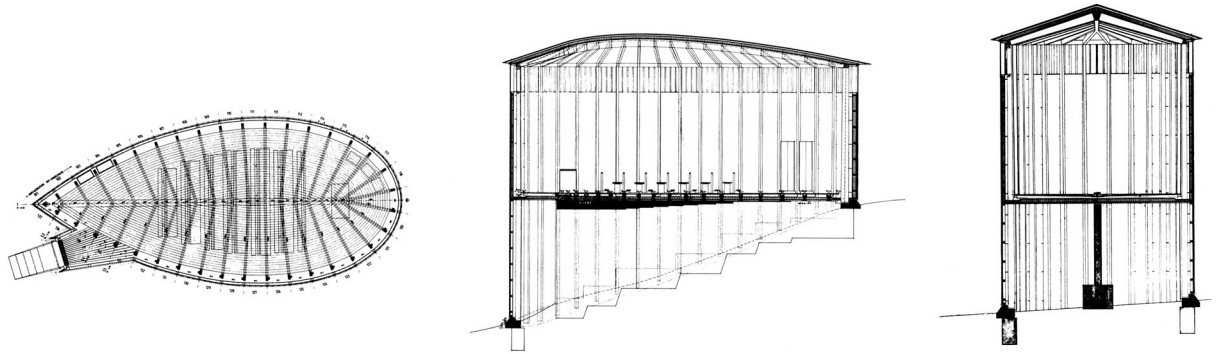


Bild 1.6: Grundriss und Schnitte, Kapelle Sogn Benedetg, bei Sumvitg



Bild 1.7: Kapelle Sogn Benedetg, bei Sumvitg, 1985-88, Arch.: Peter Zumthor, Ing.: Jürg Buchli & Jürg Conzett

tonische Entwurf und das Tragwerk aufeinander abgestimmt wurden, besonders gut zu erkennen am Übergang der Pfette in die Sparren über dem im Grundriss rundlich verlaufenden Chor sowie beim Übergang der Sparren in die Stützen im hinteren, spitz verlaufenden Kapellenbereich (Bild 1.9).

Ähnlich und doch ganz anders als bei der Kapelle Oberrealta tragen auch hier die Wände das Dach: die seitlichen Wände sind in diskrete Stützen aufgelöst, und das Dachelement, dessen Sparren (vgl. Kapitel 12) hier wie die Adern eines Blattes die Brettverschalung des Daches tragen, hat eine sehr starke räumliche Verbindung mit den Wänden, welche durch das horizontale Lichtband noch verstärkt wird. Die Verbindung des Daches mit den Wänden ist im Gegensatz zur Kapelle von Oberrealta nicht kontinuierlich, sondern diskret gestaltet. Aus dem Schnitt in Bild 1.6 ist weiter zu erkennen, dass die Wände ebenfalls auf Streifenfundamente aufgelegt sind, und dass im Gegensatz zur Kapelle Oberrealta die Bodenplatte nicht aus auf die Erde gelegten Steinen besteht, sondern aus einem einfachen Holzboden, welcher auf den Stützen aufliegt und trotzdem mittels einer Fuge von der Wandverkleidung getrennt ist, so dass er wie über unbekannten Grund zu schweben scheint (Bild 1.8). In der Tragwirkung zeigt sich so ein „fliegendes Dach" als Gegenüber zum „fliegenden Boden", womit eine ausserordentliche Leichtigkeit der Elemente erzielt wird.



Bild 1.8: Innenraum, Kapelle Sogn Benedetg, bei Sumvitg

Die von den Stützen abgesetzte Gebäudehülle vermag dank ihrer Krümmung im Grundriss das Tragwerk unter horizontalen Kräften zu stabilisieren, obschon nur feine Stahlstangen beide Tragelemente miteinander verbinden (Bild 1.8 und 1.9). Das durch das Fensterband eindringende Licht vermag sich so hinter den regelmässigen Stützen kontinuierlich entlang der silbergrau gestrichenen hölzernen Wandverkleidung zu verteilen, und vermittelt dem Raum ein feines Spiel von abgestufter Farbigkeit und diffusem Schattenwurf. Von aussen ist das Tragwerk nur im Lichtbandbereich zu erkennen: die restliche Wandoberfläche ist vollständig mit Holzschindeln „verkleidet", welche dank ihrer im Laufe der Zeit immer stärker werdenden Patina die Einheit von Gebäude und Natur weiter verstärken. (Bild 1.10).



Bild 1.9: Tragwerk, Kapelle Sogn Benedetg, bei Sumvitg

1.3 Das Picture Window House

Das dritte ausgewählte Bauwerk steht ca. 90 km von der Stadt Tokio entfernt am Strand der Izu-Halbinsel und wird nicht als Ferienhaus genutzt, sondern ganzjährlich von einem Witwer bewohnt (Bild 1.12). Das Grundstück in der Nähe des höchstgelegenen Punktes eines Hügels bietet eine wunderbare Sicht auf den Pazifik. Der Architekt Shigeru Ban hat diese Aussicht rahmen wollen und das Haus zum Fenster werden lassen; mit der Konsequenz, dass dem Tragwerk eine zentrale Rolle zukommt, um den Entwurf überhaupt realisierbar zu machen.

Die Interpretation des Ortes bewegte den Architekten zu einem stützenfreien Erdgeschoss; nur so wird es möglich, die Kontinuität des natürlichen Geländeflus-

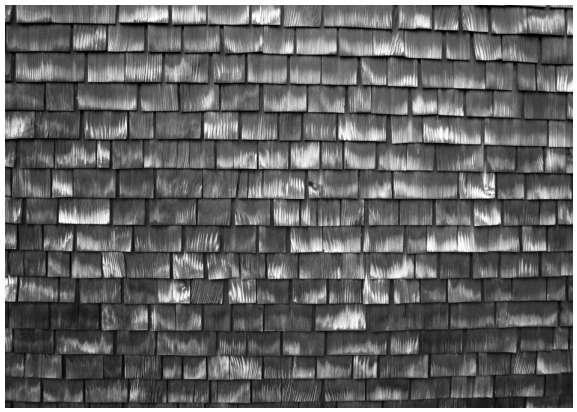


Bild 1.10: Holzschindeln, Kapelle Sogn Benedetg, bei Sumvitg

ses vom Meer bis zur Hügelspitze zu wahren. Das Haus wurde somit nicht als Brücke gebaut, um ein Hindernis zu überwinden, sondern um selber eine kleine Barriere darzustellen. Wenn alle Schiebefenster geöffnet werden, verschmilzt der Innenraum mit dem Aussenraum (Bild 1.11). Neben zwei Küchenelementen und einer freistehenden Treppe, die zu den Schlafzimmern und den Bädern im Obergeschoss führt, weist der puristisch anmutende Wohnraum keine weiteren Einrichtungen auf. Die beiden seitlich angeordneten Brückenpfeiler beinhalten nebst dem Eingang weitere Nutzräume und tragen mit ihren Stützen den Brückenträger.

Wie aus den Grundrissen, dem Schnitt und der Axonometrie (Bild 1.14) hervorgeht, kann das Tragwerk nicht mehr mit denselben einfachen Überlegungen verstanden werden wie bei den beiden in den Abschnitten 1.1 und 1.2 behandelten Kapellen. Das Primärtragwerk besteht aus Stahlträgern, welche entweder als Balken, oder als Streben von Fachwerken die Lasten abtragen Die 20 m weit gespannte Obergeschossbrücke enthält zwei in Längsrichtung verlaufende Fachwerkträger (vgl. Kapitel 10). Eines dieser Fachwerke ist frei sichtbar als gestalterisches Element in der seeseitigen Fassade angeordnet (Bild 1.12). Die vertikalen Pfostenelemente des Fachwerkes bestehen aus quadratischen Hohlprofilen, während die diagonalen Streben aus Rohren bestehen (Bild 1.13). Das zweite Fachwerk ist vollständig verkleidet in der Zwischenebene eingebettet, welche die Zimmer vom Korridor trennt und somit nicht mehr als Tragwerkselement erkennbar (Bild 1.15).

Das Haus hat somit zwei Gesichter: auf der Südseite ist die Konstruktion von zeichenhafter Direktheit, und vermittelt auf eindrückliche Weise die Funktionsweise des Tragwerks mit seinen grossen Kräften. Die atemberaubende Aussicht verleiht jedoch dem Tragwerk eine unerwartete Unaufdringlichkeit.

Auf der Nordseite dagegen, wo das Fachwerk vollständig verborgen liegt, deutet nichts mehr darauf hin, wie die Decken halten können. Diese bewusst eingesetzte „Verunklärung" des Tragwerks trägt wesentlich zum Zauber des Hauses bei. Der Stellenwert der Ingenieurlogik als Formgenerator wird hier relativiert; die Technik wird zwar keineswegs versteckt, genau so wenig wird sie jedoch gefeiert. Vielmehr verbindet sich in



Bild 1.11: Wohnraum, Picture Window House

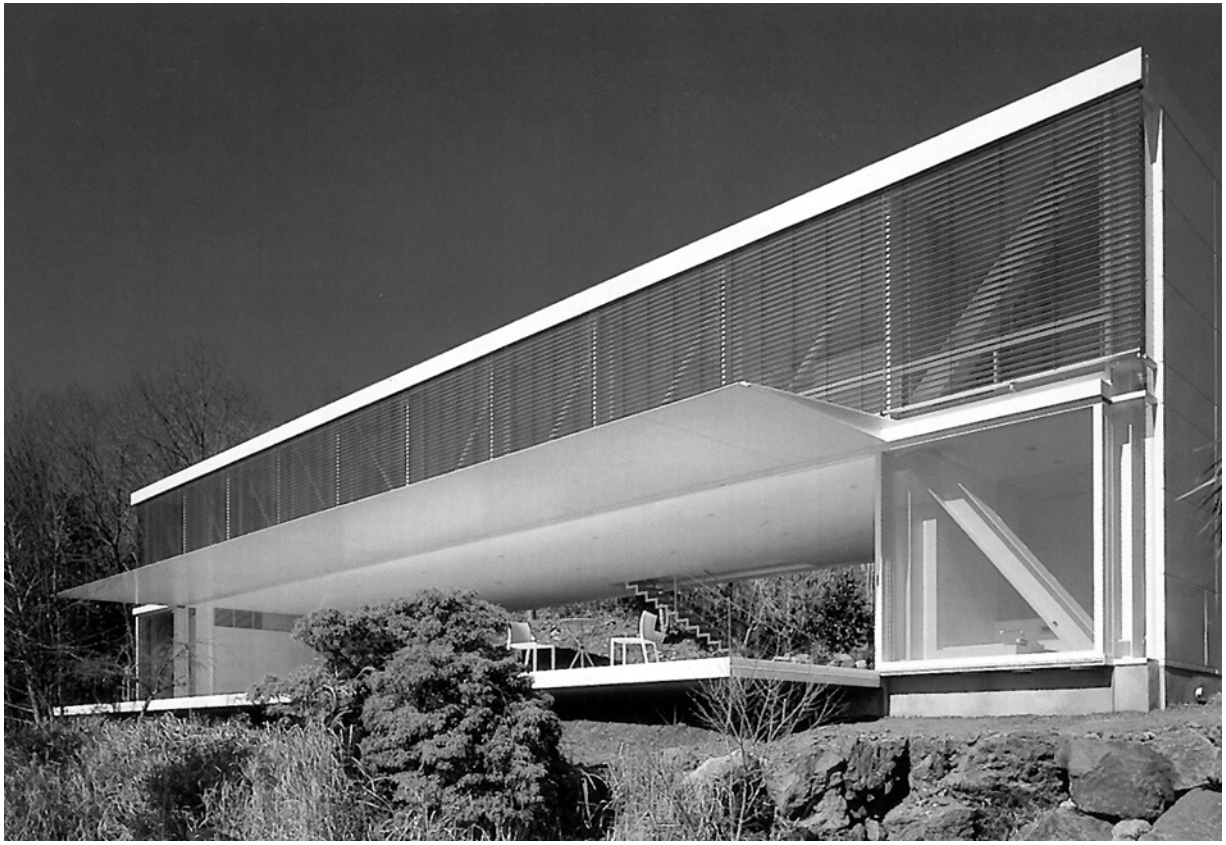


Bild 1.12: Picture Window House, Shizuoka, 2001, Arch.: Shigeru Ban, Ing.: Hoshino Architect & Engineer

diesem Haus die durch die Spannweite gegebene physikalische Notwendigkeit mit der gestalterischen Freiheit. So werden durch die Brückenkonstruktion räumliche Volumen eingeschlossen, die im japanischen Kontext lediglich einen dienenden Charakter haben. Neben dem eigentlichen Wohnraum im Erdgeschoss wird dadurch auch der Korridor im Obergeschoss zu einem gedeckten Aussenraum, vergleichbar der Engawa in einem historischen japanischen Wohnhaus.

Im Picture Window House verbindet sich so eine traditionelle Wohntypologie mit modernen Vorstellungen vom Wohnen, mit dem Tragwerk als Grenzschicht. Diese Grenzschicht ist aber dank der Ausbildung als offener Fachwerkträger zugleich trennend wie auch verbindend. Die „Verunklärung" des Tragwerks dient somit der Klärung des Entwurfs und es ist dieses Spannungsfeld zwischen Notwendigkeit und Freiheit, in dem der Dialog zwischen Ingenieur und Architekt stattfinden sollte.

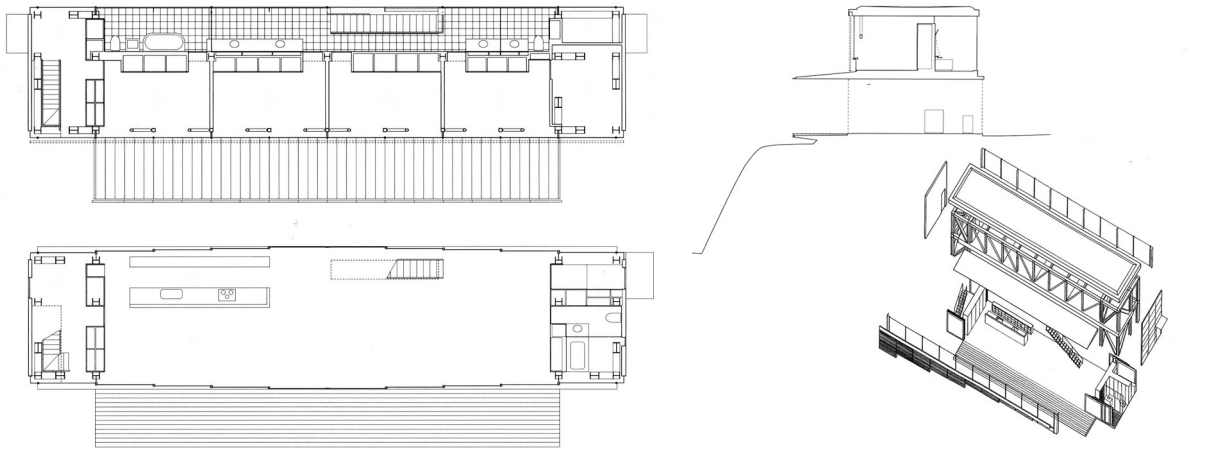


Bild 1.14: Grundriss und Axonometrie, Picture Window House



Bild 1.13: Innenansicht, Picture Window House



Bild 1.15: Aussenansicht, Picture Window House

2 Kräfte und Gleichgewicht

Die Darstellung und die elementare Handhabung der Kräfte bilden die Grundlage jeglicher Tragwerksüberlegungen. Besonders in der graphischen Statik ist die Veranschaulichung der Kräfte, der Gleichgewichtsbedingungen, der Bildung von Resultierenden sowie der äusseren und inneren Kräfte in Tragelementen von zentraler Bedeutung.

2.1 Die Kraft als vektorielle Grösse

In der Tragwerkslehre werden die Kräfte *F* (force = Kraft) durch Vektoren dargestellt. Ein Vektor ist im mathematischen Sinne durch seine *Richtung* und durch seine *Intensität* vollständig definiert und kann frei verschoben werden. Man redet dabei von *freien Vektoren* (Bild 2.1a).

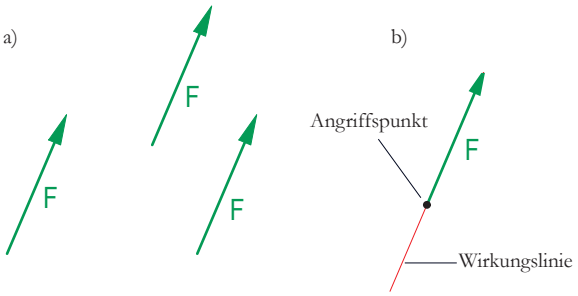


Bild 2.1: Kraft *F* als freier (a) und gebundener Vektor (b)

Da die Kräfte meistens geometrisch an einen Ort gebunden sind, werden zusätzliche Festlegungen erforderlich. Häufig wird in Ergänzung zur Richtung und Grösse der Kraft auch noch ihr *Angriffspunkt* angegeben (Bild 2.1b). Da, wie weiter unten gezeigt wird, eine Verschiebung der Kraft entlang ihrer Achse keinen Einfluss auf die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen hat, reicht es in vielen Fällen aus, die Achse zu kennen auf welcher die Kraft liegt, die so gennante *Wirkungslinie* (oder Kraftlinie).

Wenn dagegen diejenigen Kräfte untersucht werden, welche im Inneren der Tragelemente hervorgerufen werden, spielt die genaue Lage der Kraft in der Regel eine Rolle, so dass bei entsprechenden Aufgabenstellungen die Kenntnis des Angriffspunktes der Kraft wesentlich ist. Im Allgemeinen ist somit in der Tragwerkslehre die Kraft durch drei Grössen bestimmt:

1. Richtung
2. Intensität
3. Angriffspunkt.

In der Literatur wird bei der ersten Grösse manchmal zwischen Richtung und Sinn unterschieden. Die Richtung ist dann als Gerade definiert, und mit dem Sinn wird die Orientierung des Kraftvektors auf dieser Geraden festgelegt. Im vorliegenden Manuskript wird die Richtung im vektoriellen Sinn verstanden, definiert durch einen Winkel zwischen 0 und 360° ab einer Referenzachse. Wenn nebst den vektoriellen Grössen Richtung und Intensität auch noch der Angriffspunkt als geometrische Grösse festgelegt ist, redet man von *gebundenen Vektoren*. Der Angriffspunkt und die Richtung der Kraft definieren eindeutig eine Gerade, die Wirkungslinie. Beim Darstellen der Kräfte ist es zweckmässig, die Länge ihres Vektors proportional zur Grösse der Kraft zu wählen.

2.2 Relevante Kraftarten für die Tragwerksanalyse

Eine erste Art von Kräften, welche auf ein Tragwerk wirken, sind vom physikalischen Standpunkt aus gesehen Gravitationskräfte und werden als *Lasten* bezeichnet.

Eine beliebige Masse, z.B. eine Person, ein Stuhl, ein Tisch oder ein Teil des Tragwerks wird von der Erde

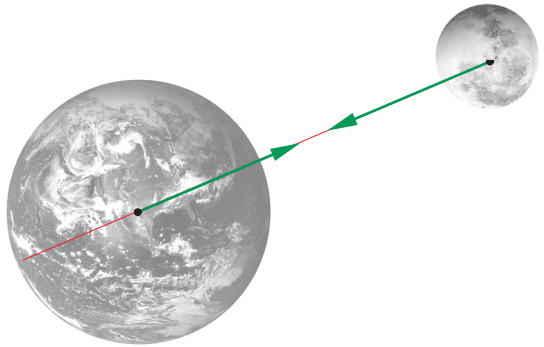


Bild 2.2: Massenanziehung am Beispiel von Erde und Mond

angezogen (Bild 2.2). Mit anderen Worten ist jede Masse der Anziehungskraft der Erde unterworfen. Umgekehrt erfährt aber auch die Erde eine Gravitationskraft von jeder Masse, welche sich auf der Erde befindet, beispielsweise von einer Person. Die Erde und eine beliebige Person können somit betrachtet werden als zwei Massen, welche sich gegenseitig anziehen (Bild 2.3). Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz (Isaac Newton, 1642-1727) hat die Kraft, welche die Erde auf die Person ausübt, die gleiche Intensität wie die Kraft, welche die Person auf die Erde ausübt. Sie ist proportional zum Produkt der beiden Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Massen. Setzt man in diese Formel die Masse und den Radius der Erde ein, wobei der Radius näherungsweise den Abstand des Schwerpunktes der Erde von dem-

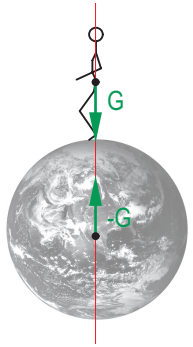


Bild 2.3: Gravitationskraft am Beispiel einer Person

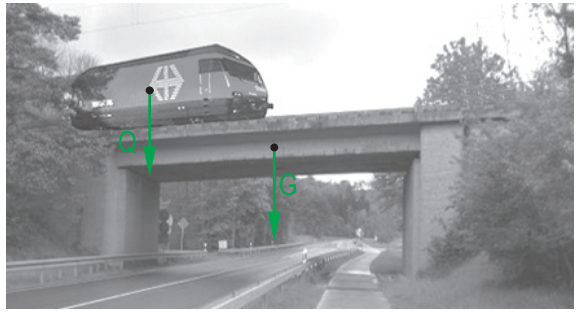


Bild 2.4: Veränderliche Last *Q* und ständige Last *G*

jenigen des Gegenstands auf der Erde beschreibt, so resultiert für die Anziehungskraft des Gegenstands die Beziehung

$$G = m \cdot 9.81.$$

Diese verknüpft die Last *G* in [N] linear mit der Masse *m* in [kg] eines auf der Erde befindlichen Gegenstands; dabei ist die Grösse 9.81 mit der Einheit [m/s²] eine Proportionalitätskonstante, welche als Erdbeschleunigung bezeichnet wird. Wie alle Kräfte wird auch die Last als Gravitationskraft in Newton ausgedrückt. Diese Messgrösse entspricht einem Kilogramm, multipliziert mit einem Meter, dividiert durch eine Sekunde im Quadrat:

$$1\ [\text{Newton}] = 1\ [\text{N}] = 1\ [\text{kg}\cdot\text{m/s}^2].$$

Ein Gegenstand mit einer Masse *m* von 1 [kg] hat folglich auf der Erde eine Eigenlast *G* von 9.81 [N], oder näherungsweise 10 [N]. Das bedeutet, dass eine Person mit einer Masse von 70 [kg] einer Last *G* von exakt 686.7 [N] entspricht, also angenähert 700 [N] respektive 0.7 [kN]. Die Lasten haben als Angriffspunkt den *Schwerpunkt* des Gegenstandes, an dem sie angreifen. Die Lasten werden im Volksmund als Gewichte bezeichnet.



Bild 2.5: Windkraft *W*

Die auf ein Tragwerk wirkenden Lasten (Gravitationskräfte), werden in zwei Gruppen unterteilt:

1. die *ständigen Lasten G* (die Eigenlasten der tragenden und nicht tragenden Bauteile, welche zeitlich unveränderlich sind) (Bild 2.4)
2. die *veränderlichen Lasten Q* (Eigenlasten der Personen, der Möbel, des Schnees, oder anderer Nutzlasten) (Bild 2.4).

Zusätzlich können zwei weitere, nicht primär durch die Gravitation bedingte Kraftarten, auf ein Tragwerk einwirken. Es sind dies

3. die *Windkräfte W* (Bild 2.5)
4. die *Massenkräfte* (Erdbeben, Anprall).

Die Windkräfte sind Druck- und Sogkräfte als Folge des Widerstandes, welchen ein Bauwerk der Windströmung entgegensetzt. Die Massenkräfte resultieren dagegen aus der Beschleunigung der Massen, welche bei einem Erdbeben (Bilder 2.6 und 2.7) oder einem Anprall auftreten. Diese Einwirkungsarten können grundsätzlich beliebig gerichtet sein, sie werden in der Tragwerkslehre jedoch meist vereinfachend als vorwiegend in horizontaler Richtung wirkend angenommen. Zusätzlich ist beim Wind die vertikale Sogkraft zu untersuchen,



Bild 2.6: Durch Erdbebenkräfte beschädigte Brücke in Kobe, 1995

welche beispielsweise ein Dach zum Abheben bringen kann. Wird angenommen, dass die Windlast gleichmässig über die ebene Fläche verteilt ist, an der sie angreift, so stimmt ihr Angriffspunkt mit dem Schwerpunkt dieser Fläche überein.

Die vier beschriebenen auf ein Tragwerk wirkenden Kraftarten stellen im Sinne der Tragwerkslehre so genannte *äussere Kräfte* dar und werden als *Einwirkungen* bezeichnet.

2.3 Gleichgewichtsbedingungen zweier Kräfte

Eine auf der Oberfläche der Erde stehende Person erfährt nicht nur die Gravitationskraft der Erde. Aus Erfahrung ist bekannt, dass der Boden die ′aktive′Funktion

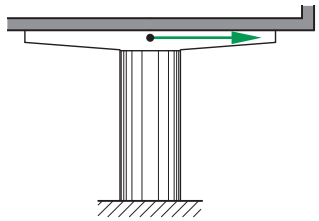


Bild 2.7: Erdbeben-Ersatzkraft in einem Brückenquerschnitt

hat, die Person zu halten, indem er eine nach oben gerichtete Kraft auf ihre Füsse ausübt. Um diese Kraft darstellen zu können, muss die Person im Gedanken vom restlichen System Person-Erde abgetrennt werden (Bild 2.8b). Der abgetrennte Teil des Systems, mit allen Kräften, die darauf wirken, wird als *Subsystem* bezeichnet.

Generell kann festgehalten werden, dass bei einer solchen Betrachtung Kräfte sowohl im Inneren des Subsystems als auch an den Grenzen des Subsystems vorhanden sind, d.h. überall dort, wo die Subsystemgrenzen das zu untersuchende System von der Umwelt abschneiden. Einzelne dieser Kräfte können in Spezialfällen gleich null sein.

Im beschriebenen Beispiel ist offensichtlich, dass die Kraft des Bodens auf die Person, welche beim Abtrennen der Person vom Gesamtsystem an der Subsystemgrenze entsteht, und die Kraft der Person auf den Boden, welche beim Abtrennen der Erde vom Gesamtsystem an der Subsystemgrenze entsteht, die gleiche Intensität haben müssen (Bild 2.8 a und b).

Um diese Situation zu beschreiben sagt man, dass 'die Aktion der Reaktion entspricht' (kurz: *actio = reactio*, berühmte von Isaac Newton formulierte Gleichung). Dieses Prinzip gilt immer wenn Subsysteme abgetrennt werden. Es setzt voraus, dass ein Subjekt definiert wird, welches die Aktion ausübt und ein Objekt, welches die Aktion erleidet und eine Reaktion ausübt. Das Prinzip gilt auch, wenn das Subjekt und das Objekt miteinander ausgetauscht werden. Um mögliche Verwirrungen auszuschliessen ist es zweckmässig, zu definieren, welcher Gegenstand welche Kraft auf welchen Gegenstand ausübt (Kraft der Person auf den Boden oder Kraft des Bodens auf die Person).

Damit die im Bild 2.8b dargestellte Person im *Gleichgewicht* ist, müssen verschiedene Bedingungen erfüllt sein. Die beiden an ihr angreifenden Kräfte sind miteinander im Gleichgewicht, wenn

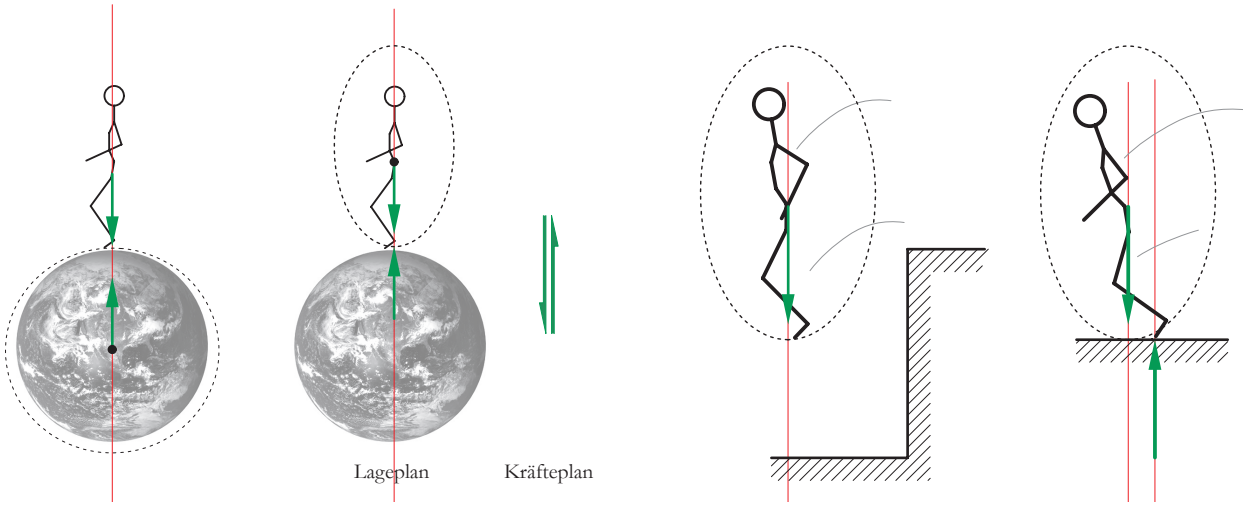


Bild 2.8: Gleichgewichtsbedingung am Subsystem

1. sie gleiche Intensität und
2. entgegengesetzte Richtung haben und
3. auf der gleichen Wirkungslinie liegen.

Die beiden ersten Bedingungen können in einer gleichbedeutenden Bedingung zusammengefasst werden: die beiden Kräfte müssen sich *vektoriell aufheben*. Somit lauten die verallgemeinerten Gleichgewichtsbedingungen zweier Kräfte:

Zwei Kräfte sind miteinander im Gleichgewicht, wenn

1. sie sich im Kräfteplan vektoriell aufheben und
2. sie im Lageplan auf der gleichen Wirkungslinie liegen.

Im *Kräfteplan* werden die Kräfte unabhängig von ihrem Angriffspunkt zeichnerisch unter Berücksichtigung ihrer Richtung vektoriell aneinandergereiht, d.h. vektoriell addiert. Sowohl Richtung als auch Intensität müssen somit korrekt übertragen werden, wobei die *Länge der Pfeile proportional zur Intensität der Kraft* aufzutragen ist. Mehrere Kräfte heben sich dann vektoriell auf, wenn das Ende des zuletzt aufgetragenen Kraftvektors mit dem Anfang des zuerst aufgetragenen Kraftvektors übereinstimmt.

Im *Lageplan* werden die Kräfte unter Berücksichtigung ihrer Angriffspunkte geometrisch korrekt am physikalischen System dargestellt. Grundsätzlich muss die Grösse der Kraft nicht massstäblich zu ihrer Intensität aufgezeichnet werden. Eine qualitative Darstellung ist ausreichend, *die Richtung und Wirkungslinie sollte dagegen exakt sein.*

Die Bedeutung der ersten Bedingung (vektorielles Aufheben) kann leicht verstanden werden, wenn im Gedanken die Kraft unter den Füssen zum Verschwinden gebracht wird. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn eine

Person von einem Tisch springt. Dann ist diese nicht mehr im statischen Gleichgewicht, sondern erfährt eine *Translationsbewegung* (Bild 2.8c).

Auch die Bedeutung der zweiten Bedingung (gleiche Wirkungslinie) kann einfach verstanden werden. Wenn eine Person beim Stehen sich zu stark nach vorne beugt, dann fällt diese nach vorne über, das heisst, der Körper erfährt eine *Rotationsbewegung* um den vorderen Punkt der Füsse (Bild 2.8d).

2.4 Resultierende von zwei beliebig gerichteten Kräften

Im zuvor behandelten Beispiel (Bild 2.8) wurde gezeigt, dass eine der beiden verallgemeinerten Gleichgewichtsbedingungen verlangt, dass sich die Kräfte vektoriell aufheben. Im Kräfteplan wurden die Kräfte aneinandergereiht. Wenn allgemein der Anfangspunkt der zuerst aufgetragenen Kraft mit dem Endpunkt der zuletzt aufgetragenen Kraft verbunden wird, resultiert ein neuer Kraftvektor. Wird dieser im Lageplan auf einer Wirkungslinie angeordnet, welche durch den Schnittpunkt der Wirkungslinien der beiden Ausgangskräfte verläuft, so hat dieser neue Kraftvektor die gleiche statische Wirkung wie die beiden aneinander gereihten Kräfte. Dieser neue Kraftvektor wird als *Resultierende* der beiden Kräfte bezeichnet.

Die Resultierende ist *statisch äquivalent* zu den beiden Ausgangskräften. Es kann somit gefolgert werden, dass zwei Kräfte, welche miteinander im Gleichgewicht sind, eine Resultierende gleich null haben. Diese hat keine beschleunigende Wirkung auf den Körper, an dem sie angreift. Wenn die beiden Ausgangskräfte zusätzlich auf der gleichen Wirkungslinie liegen, erzeugen sie keine Rotationsbewegung, und somit liegt ein Gleichgewichtszustand vor.

Im Bild 2.9 ist ein Baum dargestellt, auf welchen nebst der vertikalen Eigenlast G eine horizontale Windkraft W wirkt. Die Resultierende R dieser beiden Kräfte wird vektoriell im Kräfteplan ermittelt, indem eine zu den beiden Kräften G und W statisch äquivalente Kraft durch Vektoraddition konstruiert wird. Wie weiter oben beschrieben, wird dazu ein *Kräftezug* aufgezeichnet, und der Anfangspunkt dieses Kräftezugs mit seinem Endpunkt verbunden. Beim Aufzeichnen des Kräftezugs spielt die Reihenfolge grundsätzlich keine Rolle. Die Intensität der resultierenden Kraft kann unter der Bedingung, dass die beiden Ausgangskräfte proportional zu ihrer Intensität aufgezeichnet worden sind, aus dem Kräfteplan herausgemessen werden. Der Kräfteplan liefert zudem die Richtung der Resultierenden.

Die so ermittelte Resultierende wird anschliessend *parallel in den Lageplan verschoben*. Ihre Wirkungslinie muss durch den Schnittpunkt der beiden Ausgangskräfte verlaufen. Nur so kann gewährleistet werden, dass die Resultierende statisch äquivalent zu den Ausgangskräften ist, d.h. dass das System entlang der Wirkungslinie der Resultierenden eine Translation und keine Rotation erfährt.

2.5 Resultierende von zwei parallelen Kräften

Falls die beiden Ausgangskräfte parallel gerichtet sind, versagt das unter Abschnitt 2.4 beschriebene Verfahren. Die Intensität und die Richtung der Resultierenden lassen sich zwar auch in diesem Fall im Kräfteplan ermitteln, das Verschieben der Resultierenden in den Lageplan ist jedoch nicht mehr auf einfache Weise möglich, da der Schnittpunkt der Wirkungslinien der beiden parallelen Ausgangskräfte im Unendlichen liegt.

Im Bild 2.10 wird für den Fall zweier unterschiedlich grosser, gleich gerichteter Kräfte gezeigt, nach welcher Gesetzmässigkeit der Schnittpunkt sich ins Unendliche verschiebt, wenn die Neigung der zweiten Kraft progressiv von der Horizontalen in die Vertikale verdreht wird. Die senkrecht zu den Ausgangskräften gemessenen Abstände zur Wirkungslinie der Resultierenden verhalten sich umgekehrt proportional zu den Intensitäten der beiden Ausgangskräfte. Für den Fall von zwei parallelen Kräften wird dieses Resultat auch als *Hebelgesetz* bezeichnet. Im Bild 2.10 wird rechts schematisch gezeigt, wie die Lage der Wirkungslinie der Resultierenden in diesem Fall geometrisch konstruiert werden kann. Weiter sind die analogen Überlegungen für zwei

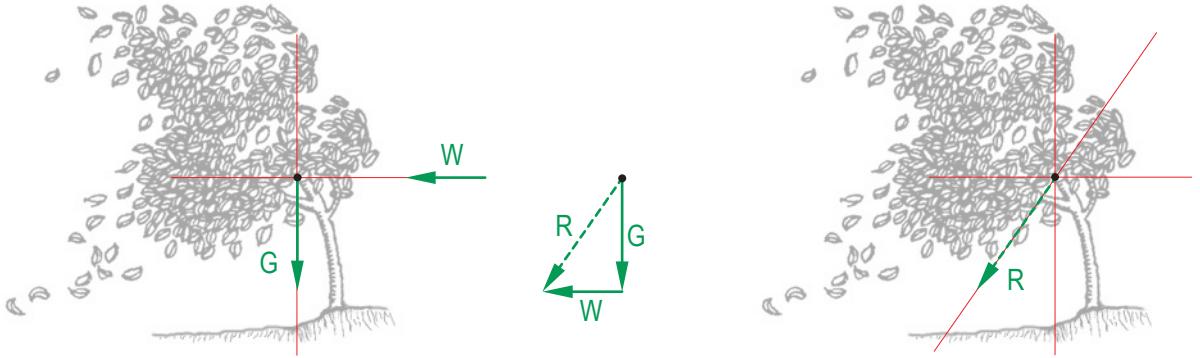


Bild 2.9: Resultierende als statisch äquivalente Kraft von zwei Kräften in allgemeiner Lage

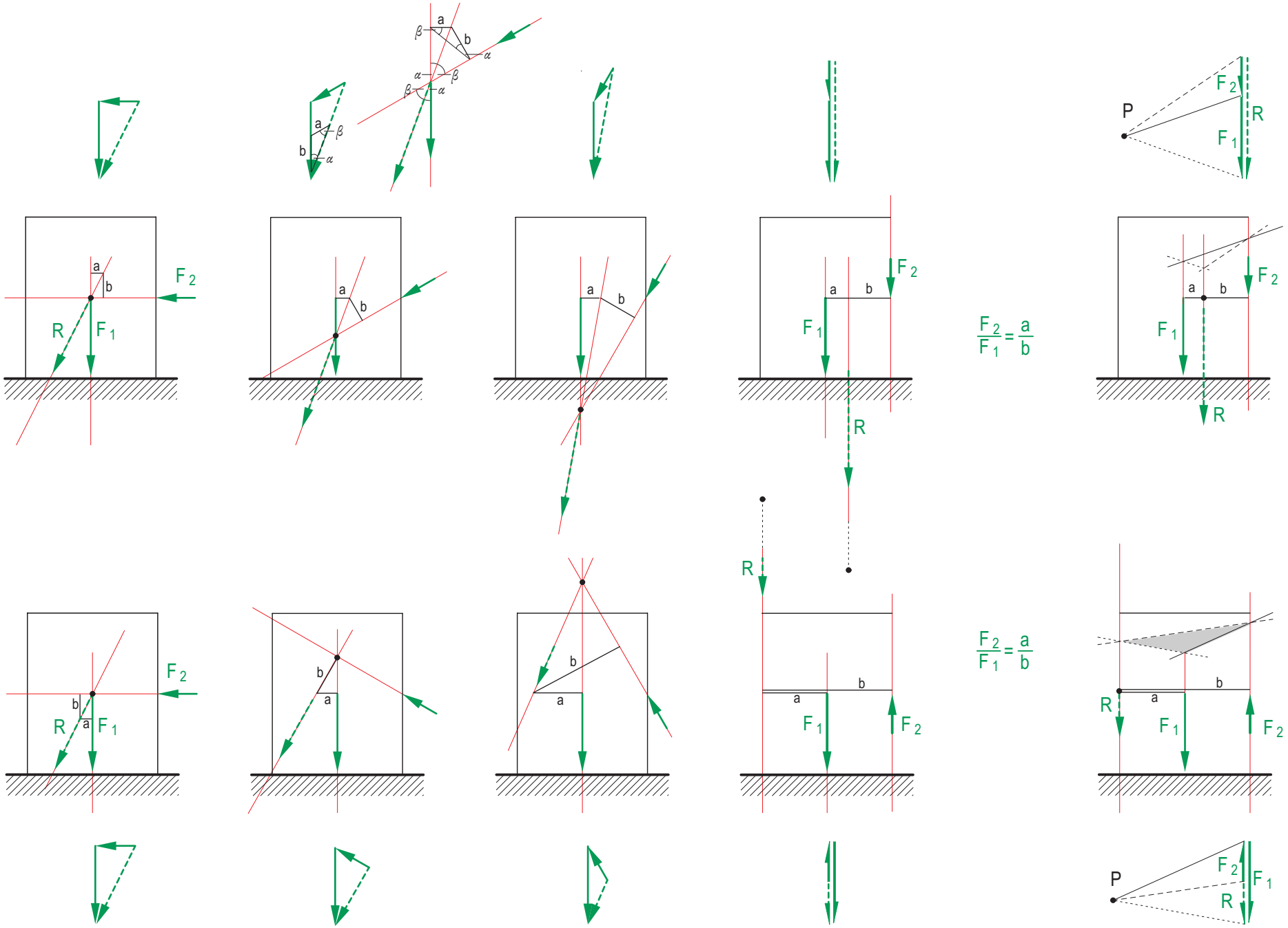


Bild 2.10: Resultierende von zwei parallelen Kräften

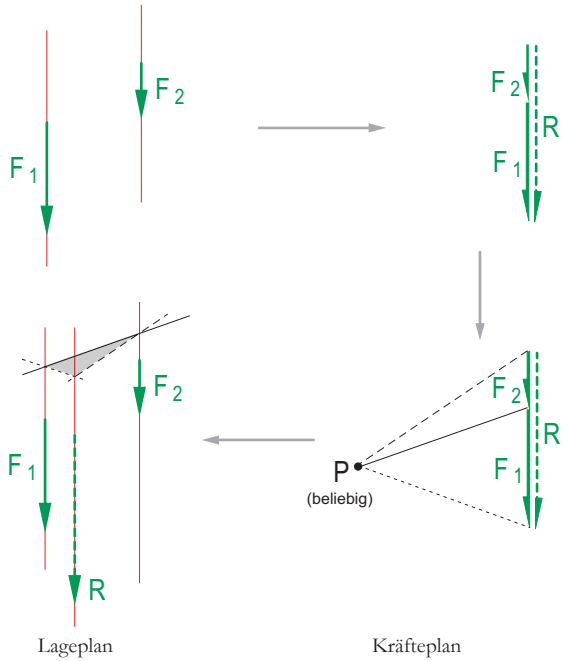


Bild 2.11: Ermitteln der Resultierenden von zwei parallelen Kräften mit Hilfe des Seilpolygon-Verfahrens

parallele, unterschiedlich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kräfte dargestellt. In diesem Fall liegt die Resultierende nicht mehr zwischen, sondern ausserhalb der beiden Ausgangskräfte.

In Bild 2.11 ist das Vorgehen zur Ermittlung der Resultierenden detailliert beschrieben. Im ersten Schritt werden die beiden Ausgangskräfte im Lageplan dargestellt. Im zweiten Schritt werden im Kräfteplan die Intensität und die Richtung der Resultierenden ermittelt. Dabei wird die Reihenfolge der Ausgangskräfte so festgelegt, dass die *Kräfte im Lageplan von rechts nach links zu berücksichtigen* sind. Diese erste *Konvention* wird eingeführt, um die Lesbarkeit der graphischen Lösung zu verbessern. Die Intensität und Richtung der zu ermittelnden Resultierenden wird dadurch nicht beeinflusst.

Im dritten Schritt werden im Kräfteplan die Anfangs- und Endpunkte der beiden Ausgangskräfte mittels Strahlen mit dem beliebig gewählten Pol P verbunden. Abschliessend wird zuerst der mittlere Strahl in den Lageplan verschoben. Die zwei äusseren Strahlen des Kräfteplans werden dann so in den Lageplan übertragen, dass sie durch die beiden Schnittpunkte des ersten Strahls mit den Wirkungslinien der Ausgangskräfte verlaufen. Die Wirkungslinie der Resultierenden verläuft im Lageplan durch den Schnittpunkt der beiden zuletzt aufgetragenen Strahlen.

2.6 Gleichgewicht von drei beliebig gerichteten Kräften

Die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit drei beliebig gerichtete Kräfte miteinander im Gleichgewicht sind, können einfach hergeleitet werden indem zwei dieser Kräfte zu einer Resultierenden zusammengefasst werden. Im Bild 2.12 ist eine Staumauer dargestellt an der die Eigenlast und eine Wasserkraft angreifen. Das Gleichgewicht erfordert eine dritte Kraft an der Subsystemgrenze der Staumauer. Durch die Bildung der Resultierenden *R* der beiden Ausgangskräfte wird dieser Fall auf den Fall der Gleichgewichtsbedingungen zweier Kräfte zurückgeführt. Die Kraft, welche der Baugrund auf das Tragwerk ausübt, kann somit eindeutig ermittelt werden. Ihre Wirkungslinie muss offensichtlich durch den Schnittpunkt der Wirkungslinien der beiden Ausgangskräfte verlaufen. Somit lauten die verallgemeinerten Gleichgewichtsbedingungen dreier Kräfte:

Drei Kräfte sind miteinander im Gleichgewicht, wenn

1. sie sich im Kräfteplan vektoriell aufheben und
2. ihre Wirkungslinien sich im Lageplan in einem Punkt schneiden.

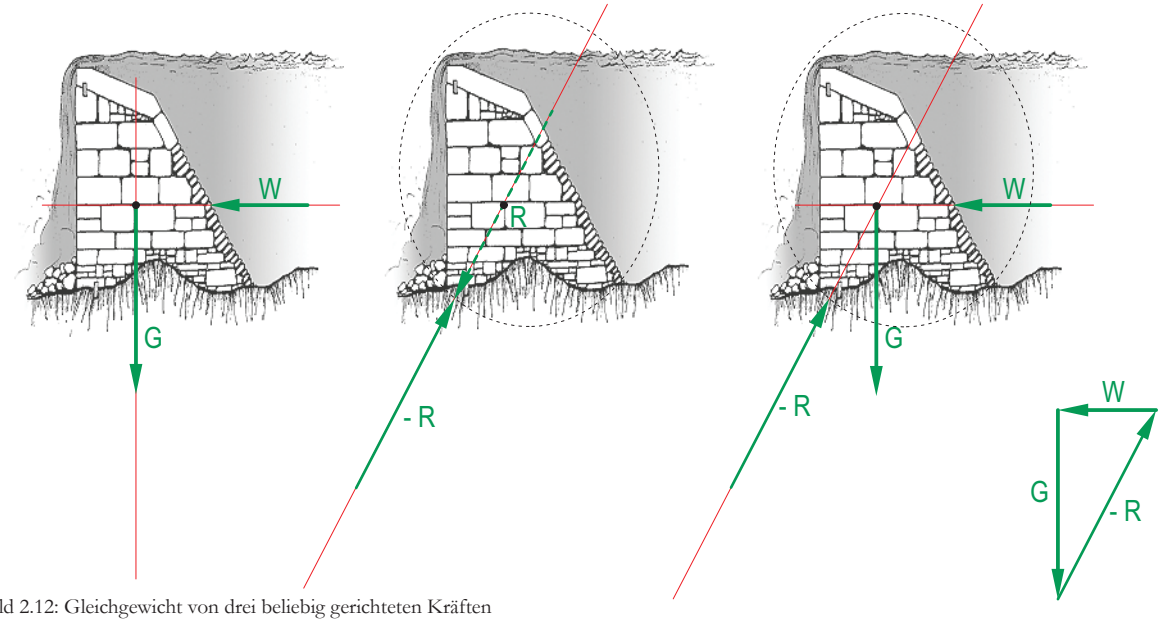


Bild 2.12: Gleichgewicht von drei beliebig gerichteten Kräften

Im *Lageplan* werden die Kräfte unter *Berücksichtigung ihrer Angriffspunkte* geometrisch korrekt am physikalischen System dargestellt. Im *Kräfteplan* werden die Kräfte unabhängig von ihrem Angriffspunkt zeichnerisch unter *Berücksichtigung ihrer Richtung* vektoriell aneinandergereiht, d.h. vektoriell addiert. Mehrere Kräfte heben sich dann vektoriell auf, wenn der Kräftezug geschlossen ist, d.h. das Ende des zuletzt aufgetragenen Kraftvektors mit dem Anfang des zuerst aufgetragenen Kraftvektors übereinstimmt.

Die erste Bedingung (vektorielles Aufheben) stellt wiederum sicher, dass das Bauwerk keine Translationsbewegung erfährt, und die zweite Bedingung (gemeinsamer Schnittpunkt der Wirkungslinien) schliesst eine Rotationsbewegung des Bauwerkes aus.

2.7 Resultierende von drei und mehreren beliebig gerichteten Kräften

Ein erstes, etwas schwerfälliges Verfahren zur Ermittlung der Resultierenden von drei und mehreren Kräften besteht in einem schrittweisen Vorgehen (Bild 2.13). Die Kräfte werden im Kräfteplan vektoriell addiert, wobei die Reihenfolge wiederum so festgelegt wird, dass die Kräfte im Lageplan von rechts nach links zu berücksichtigen sind.

Nach der vektoriellen Addition der drei Ausgangskräfte kann die Resultierende im Kräfteplan wiederum durch Verbinden des Anfangspunktes der ersten Kraft mit dem Endpunkt der letzten Kraft eindeutig bestimmt werden. Mehr Mühe bereitet die Ermittlung der Lage ihrer Wirkungslinie im Lageplan. Diese wird mit Hilfe von Zwischenresultierenden bestimmt. Die Wirkungslinie der ersten Zwischenresultierenden R_{12} verläuft im Lageplan durch den Schnittpunkt der Wirkungslinien ihrer statisch äquivalenten Kräfte F_1 und F_2. In einem

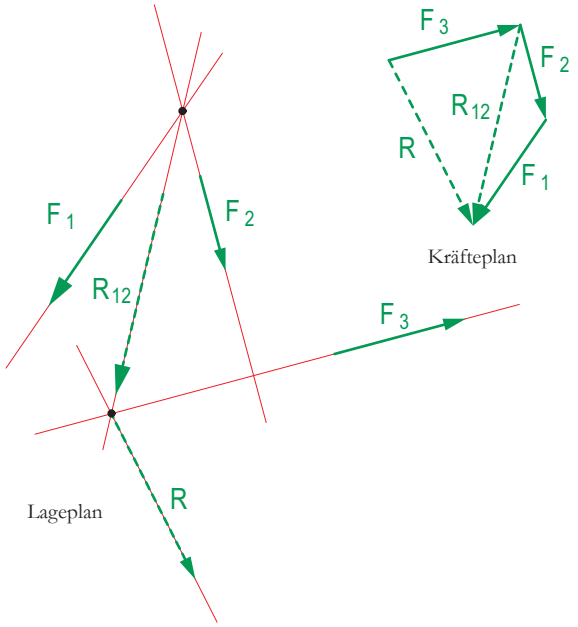


Bild 2.13: Resultierende von drei und mehreren beliebig gerichteten Kräften

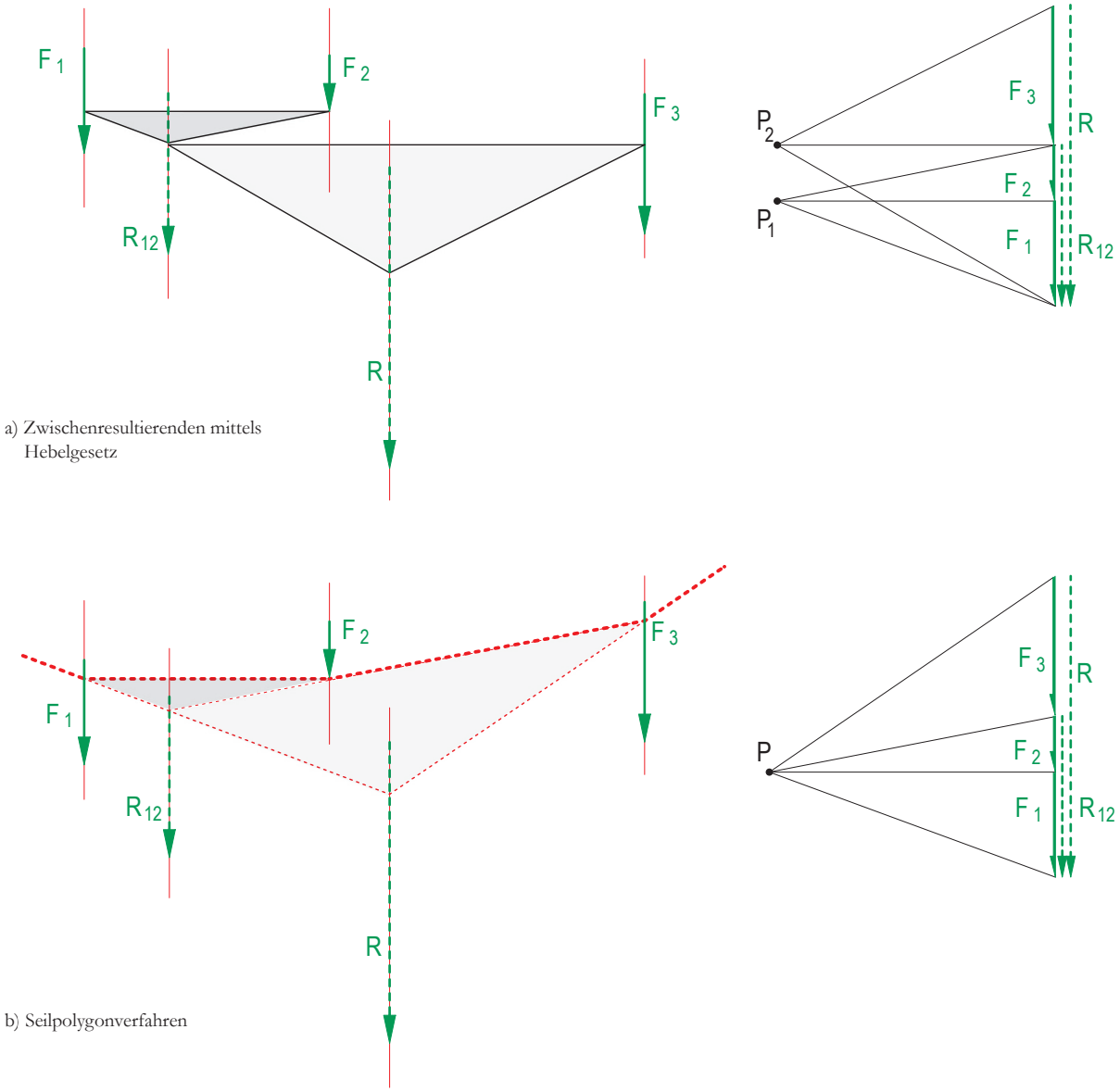
zweiten Schritt wird die gesuchte Resultierende R auf analoge Weise als resultierende Kraft von R_{12} und F_3 im Lageplan dargestellt. Dieses Verfahren kann für die Ermittlung der Resultierenden von beliebig vielen Kräften benützt werden. Im Allgemeinen sind zur Ermittlung der Resultierenden von n Kräften n-1 Zwischenschritte erforderlich. Eine elegantere Methode wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

2.8 Resultierende von drei und mehreren parallelen Kräften

Genau wie bei der Ermittlung der Resultierenden von zwei Kräften, versagt das unter Abschnitt 2.7 vorgestellte Verfahren im Fall paralleler Kräfte. In Bild 2.14a wird gezeigt, wie das schrittweise Verfahren mit Hilfsresultierenden gemäss Abschnitt 2.7 auch im Fall paralleler Kräfte angewendet werden kann.

Im Abschnitt 2.5 wurde bereits gezeigt, wie im Fall von zwei parallelen Kräften die Lage der Resultierenden im Lageplan auf der Basis des Hebelgesetzes graphisch mit Hilfe des Strahlensatzes ermittelt werden kann. Aus den Bildern 2.10 und 2.11 geht dabei hervor, dass bei der graphischen Anwendung des Strahlensatzes im Lageplan die Verbindungslinie der beiden Ausgangskräfte nicht unbedingt horizontal aufgetragen werden muss. Verschiebt man daher den Strahl um Pol P_1 zwischen der ersten Zwischenresultierenden R_{12} und der Kraft F_3 zum Strahl um Pol P_2 zwischen den Kräften F_1 und F_2, so erhält man eine wesentlich geordnetere Darstellung im Kräfteplan (Bild 2.14b).

Mit Hilfe dieser Betrachtungen haben wir das so genannte *Seilpolygon-Verfahren* hergeleitet, welches sowohl bei parallelen als auch bei beliebig gerichteten Kräften zur Ermittlung der Resultierenden angewendet werden kann. Im Kräfteplan wird nach vektorieller Addition der Ausgangskräfte ein Pol P frei gewählt. Vom Pol aus werden Strahlen zu den Anfangs- und Endpunkten der Ausgangskräfte aufgezeichnet. Anschliessend werden diese Strahlen in den Lageplan so übertragen, dass sich die zwei im Kräfteplan auf die jeweilige Kraft zulaufenden Strahlen im Lageplan mit der Wirkungslinie der entsprechenden Kraft in einem Punkt schneiden. Im Lageplan entsteht somit ein an den Wirkungslinien der Ausgangskräfte geknickter Strahlenzug, welcher als Seilpolygon bezeichnet wird. Die Wirkungslinie der Resultierenden muss dabei im Lageplan durch den Schnittpunkt des ersten und des letzten Strahles des Seilpolygons verlaufen, bilden doch diese beiden Strahlen im Kräfteplan zusammen mit der Resultierenden ein Kräftedreieck.



a) Zwischenresultierenden mittels Hebelgesetz

b) Seilpolygonverfahren

Bild 2.14: Resultierende von drei und mehreren paralellen Kräften

Das Seilpolygon hat, wie im Kapitel 3 gezeigt wird, eine physikalische Bedeutung, welche seinen Namen begründet. Wie bereits erwähnt, kann das Seilpolygonverfahren auch zur Ermittlung der Resultierenden von beliebig gerichteten Kräften angewendet werden.

2.9 Innere Zugkräfte

Alle bisher behandelten Kräfte sind im Sinne der Tragwerkslehre so genannte äussere Kräfte. Sowohl die Eigenlasten, die Nutzlasten, die Windkräfte, die Massenkräfte als auch die an den Subsystemgrenzen vorhandenen Reaktionskräfte können als Einwirkungen betrachtet werden, welche auf das mit dem Subsystem abgetrennte Tragelement wirken. Alle äusseren Kräfte werden in diesem Manuskript mit *grüner Farbe* dargestellt. Diese äusseren Kräfte rufen im Inneren des Tragelementes sogenannte *innere Kräfte* hervor, welche zum Beispiel zum Bruch des Tragelementes führen können.

Auf das Seil der im Bild 2.15 dargestellten Pendelleuchte PH5 von Poul Henningsen wirken die vom Lampenkörper und von der Deckenbefestigung ausgeübten Kräfte. Das Seil überträgt die Kraft vom Lampenkörper zur Decke und umgekehrt. Mit anderen Worten kann gesagt werden, dass das Seil vom Lampenkörper und von der Deckenbefestigung gezogen wird.

Um die Bedeutung der inneren Kraft besser zu verstehen soll vereinfacht angenommen werden, dass die Masse des Seiles verglichen mit derjenigen des Lampenkörpers vernachlässigbar ist. Bei der Betrachtung des Subsystems Seil kann man sich vorstellen, es bestehe eine Kraftübertragung durch das Seil welches auf Zug beansprucht ist. Das Seil kann in weitere Subsysteme zerlegt und diese untersucht werden. Alle angreifenden Kräfte müssen dabei die gleiche Intensität haben, d.h.

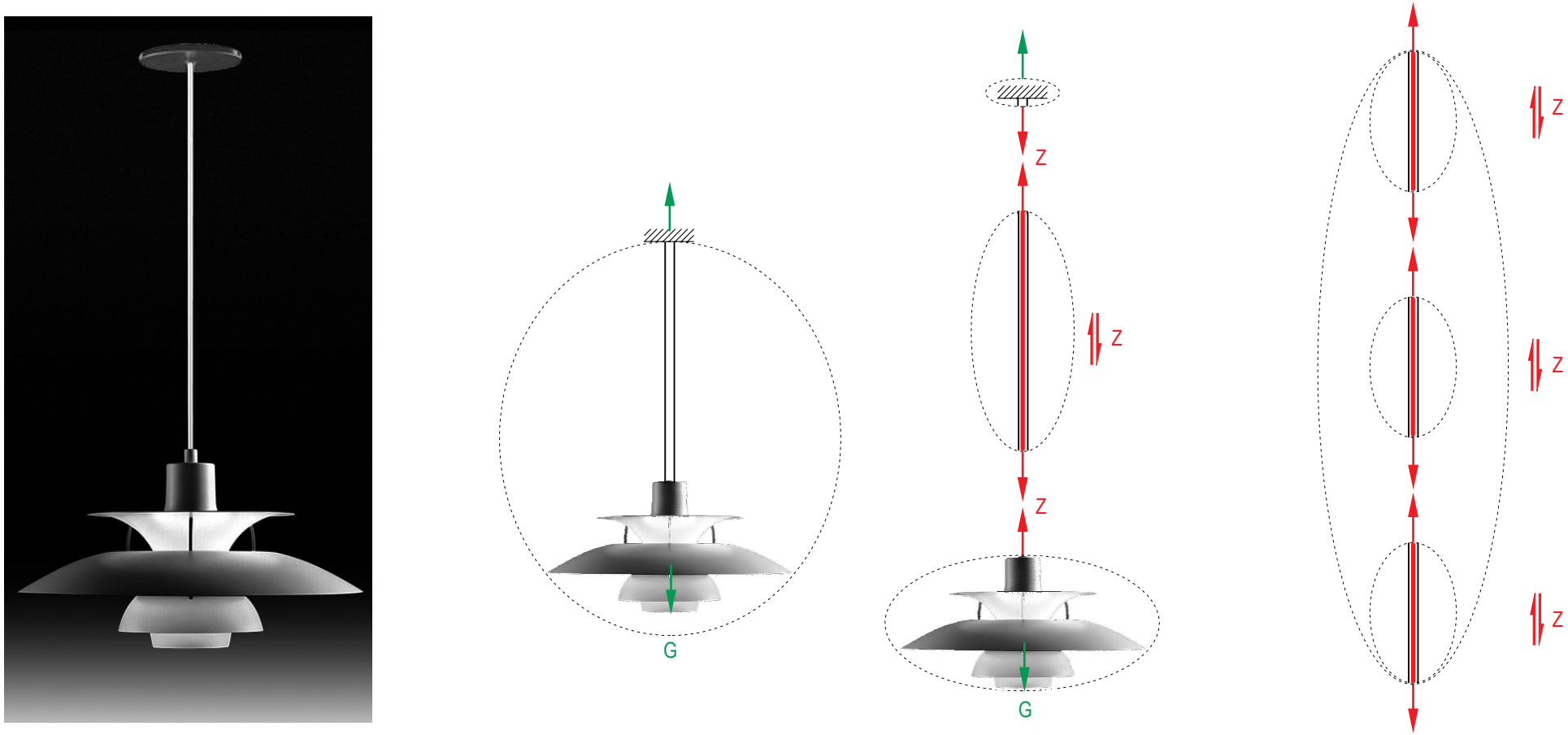


Bild 2.15: Innere Zugkräfte an der Pendelleuchte PH5 von Poul Henningsen, 1958

jeder Teil ist der gleichen Beanspruchung unterworfen, unabhängig von seiner Länge und seinem Querschnitt. Quantitativ kann die *innere Zugkraft Z* des Seiles definiert werden als die Kraft, welche von einem Ende des Seiles zum anderen übertragen wird. Im vorliegenden Fall ist das die Gravitationskraft *G* welche die Erde auf den Lampenkörper ausübt und umgekehrt, also

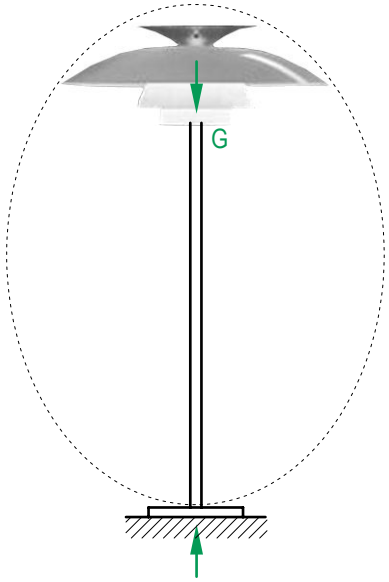
$Z = G$ gemessen in [N] resp. [kN]

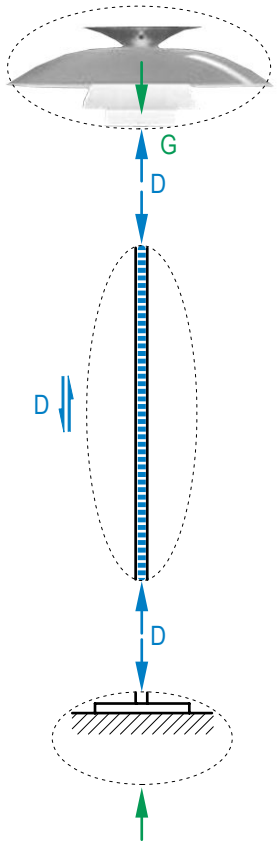
Z ist die innere Kraft und *G* die äussere Last, welche auf das Seil wirkt. Nach Konvention wird die *innere Zugkraft mit positivem Vorzeichen* behaftet. In diesem Manuskript werden die inneren Zugkräfte mit *roter Farbe* dargestellt; in der Folge werden alle auf Zug beanspruchten Tragelemente mit roter Farbe versehen, um die Übertragung der inneren Kraft von einem Ende des Tragelementes zum anderen zu veranschaulichen.

2.10 Innere Druckkräfte

Auf den Stab der im Bild 2.16 dargestellten Stehleuchte PH80 von Poul Henningsen wirken die vom Lampenkörper und vom Lampenfuss ausgeübten Kräfte. Der Stab überträgt die Kraft vom Lampenkörper zum Lampenfuss und umgekehrt. In diesem Fall kann man davon sprechen, dass der Stab vom Lampenkörper und vom Lampenfuss gedrückt wird. Wie zuvor soll angenom-







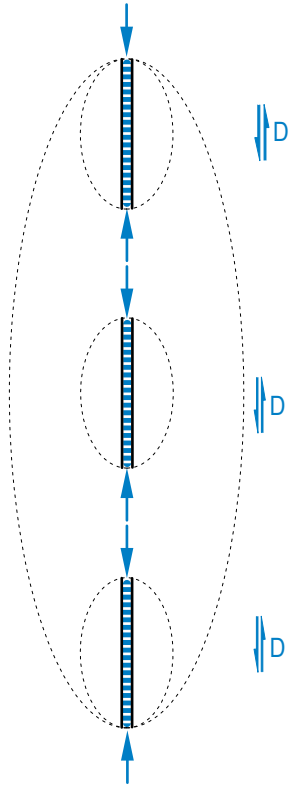


Bild 2.16: Innere Druckkraft an der Stehleuchte PH80 von Poul Henningsen, 1974

men werden, dass die Masse des Stabes verglichen mit derjenigen des Lampenkörpers vernachlässigbar ist.

Auch hier kann man sich bei der Betrachtung des Subsystems Stab vorstellen, es bestehe eine Kraftübertragung durch den Stab welcher auf Druck beansprucht ist. Dies kann wiederum mit Hilfe zusätzlicher Subsysteme veranschaulicht werden. Wie zuvor kann quantitativ die *innere Druckkraft D* des Stabes definiert werden als die Kraft, welche von einem Ende des Stabes zum anderen übertragen wird. Im vorliegenden Fall ist das die Gravitationskraft *G*, welche die Erde auf den Lampenkörper ausübt und umgekehrt.

$$D = -G \quad \text{gemessen in [N] resp. [kN]}$$

D ist die innere Kraft und *G* die äussere Last, welche auf den Stab wirkt. Aus Konvention wird die *innere Druckkraft mit negativem Vorzeichen* behaftet. In diesem Manuskript werden die inneren Druckkräfte mit *blauer Farbe* dargestellt; in der Folge werden alle auf Druck beanspruchten Tragelemente mit blauer Farbe versehen, um die Übertragung der inneren Kraft von einem Ende des Tragelementes zum anderen zu veranschaulichen. So wie die äusseren Kräfte als Einwirkungen bezeichnet werden, redet man bei den inneren Kräften von *Auswirkungen*.

3 Seile

Im Kapitel 2 wurden die Begriffe der äusseren und inneren Kraft eingeführt und es wurde gezeigt, dass die inneren Kräfte eine Folge der äusseren Kräfte sind. Zudem wurden die Begriffe der inneren Druckkraft und der inneren Zugkraft eingeführt. Allgemein lassen sich in Bezug auf die Wirkungslinie der äusseren Kraft drei unterschiedliche innere Fälle unterscheiden:

1. Wirkt die äussere Kraft in der Achse des Tragelementes und ist weg von diesem gerichtet, so wird eine innere Zugkraft erzeugt. Beispielhaft hierfür ist die Tragwirkung von Seilen (Kapitel 3 und 4)
2. Wirkt die äussere Kraft in der Achse des Tragelementes und ist auf dieses zu gerichtet, so wird eine innere Druckkraft erzeugt. Exemplarisch lässt sich dies an Bögen untersuchen. (Kapitel 6 und 7)
3. Wirkt die äussere Kraft in eine beliebige Richtung bezüglich der Achse des Tragelementes so wird neben einer möglichen inneren Zugkraft respektive Druckkraft auch eine so genannte Biegung erzeugt. Diese Art der Tragwirkung spielt bei Fachwerken, Balken, Rahmen oder schlanken Stützen eine Rolle. (Kapitel 10 bis 15).

3.1 Tragwirkung eines Seiles unter einer konzentrierten Einzellast

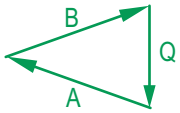
Seile sind nach obiger Klassifikation Tragelemente, die lediglich Kräfte in Seilrichtung, also innere Zugkräfte, übertragen können. Der einfachste Fall einer solchen Belastung wurde bereits in Abschnitt 2.9 behandelt. In Bild 3.1 ist ein Seiltänzer dargestellt, welcher auf einem Seil läuft und somit von diesem getragen wird. Da das Gewicht des Tänzers eine äussere Kraft erzeugt welche nicht axial gerichtet ist, muss die Tragwirkung des Seiles einer eigenen Logik folgen welche im Folgenden genauer untersucht werden soll.

Sei hierzu ein mit seinen beiden Enden auf gleicher Höhe festgebundenes Seil in der Feldmitte durch eine Last Q beansprucht. Die Eigenlasten des Seiles werden zunächst einmal vernachlässigt. Zur Untersuchung der Tragwirkung des Seiles wird dieses im Lageplan massstäblich dargestellt (Bild 3.2a). Die Neigungen der beiden Seilsegmente müssen dabei der Wirklichkeit entsprechen. Aus Erfahrung ist bekannt, dass das Seil sich unter dem Einfluss der Last nach unten verformt, um eine Gleichgewichtslage zu finden und dabei die Form eines Dreiecks annimmt.

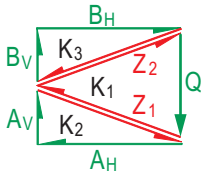


Bild 3.1: Seiltänzer

a) äussere Kräfte



b) innere Kräfte



c) Gesamtsystem

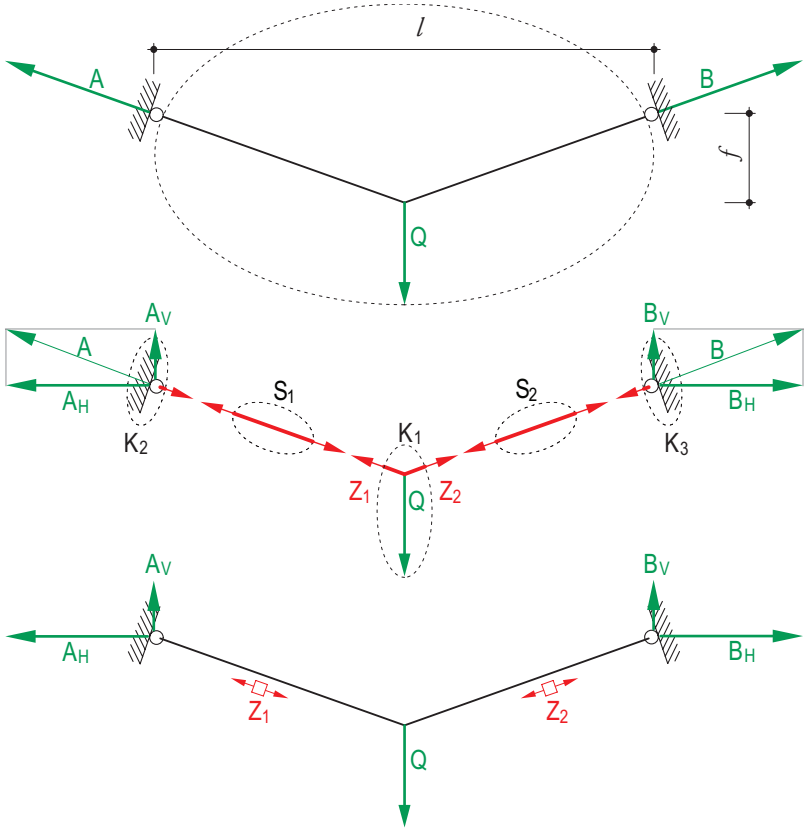


Bild 3.2: Seil mit einer Last

Die Geometrie dieses Tragwerks ist im Lageplan definiert durch den Abstand der beiden Auflagerpunkte und der Differenz der Höhe des tiefsten und des höchsten Punktes des Seiles. Im technischen Sprachgebrauch wird die Länge *l* als *Spannweite* und die Höhe *f* als *Pfeilhöhe* bezeichnet.

Um die Tragwirkung des Seiles zu verstehen, wird zuerst ein Subsystem gebildet (Bild 3.2a), welches die beiden Seilsegmente und die Last *Q* beinhaltet. An den Subsystemgrenzen wirken die beiden Auflagerkräfte *A* und *B* in Richtung der entsprechenden Seilsegmente. Diese beiden Kräfte werden parallel in den Kräfteplan übertragen; dabei ergeben sich ihre Intensitäten aus der Bedingung, dass sie mit der Kraft *Q* im Gleichgewicht sein müssen, d.h. die drei Kräfte *Q*, *A* und *B* sich vektoriell aufheben müssen. Dabei wird betreffend Reihenfolge der Aufzeichnung der Kräfte die weitere *Konvention* eingeführt, dass die Kräfte im Lageplan im *Uhrzeigersinn* berücksichtigt werden. Die drei Kräfte *Q*, *A* und *B* sind die äusseren am Seil angreifenden Kräfte.

Im Weiteren sollen die inneren Kräfte des Seiles untersucht werden (Bild 3.2b). Zu diesem Zweck wird zuerst ein Subsystem K_1 abgetrennt, welches den Seiltänzer, dargestellt durch die Last *Q*, und zwei kurze Teile des Seiles beinhaltet. An den Grenzen des Subsystems werden die inneren Kräfte Z_1 und Z_2 in Richtung der entsprechenden Seilsegmente eingeführt. Diese Kräfte werden vom Seil auf den Knoten ausgeübt und daher als innere Knotenkräfte bezeichnet. Sie werden wiederum so in den Kräfteplan übertragen, dass die erste Gleichgewichtsbedingung, das vektorielle Aufheben der Kräfte, erfüllt ist. Die zweite Gleichgewichtsbedingung, der Schnitt der Wirkungslinien der drei Kräfte in einem gemeinsamen Punkt, verlangt, dass der Schnittpunkt der beiden Seilsegmente auf der Wirkungslinie der Schwerkraft der aufgehängten Masse liegen muss. Die Intensitäten der inneren Kräfte Z_1 und Z_2 werden aus

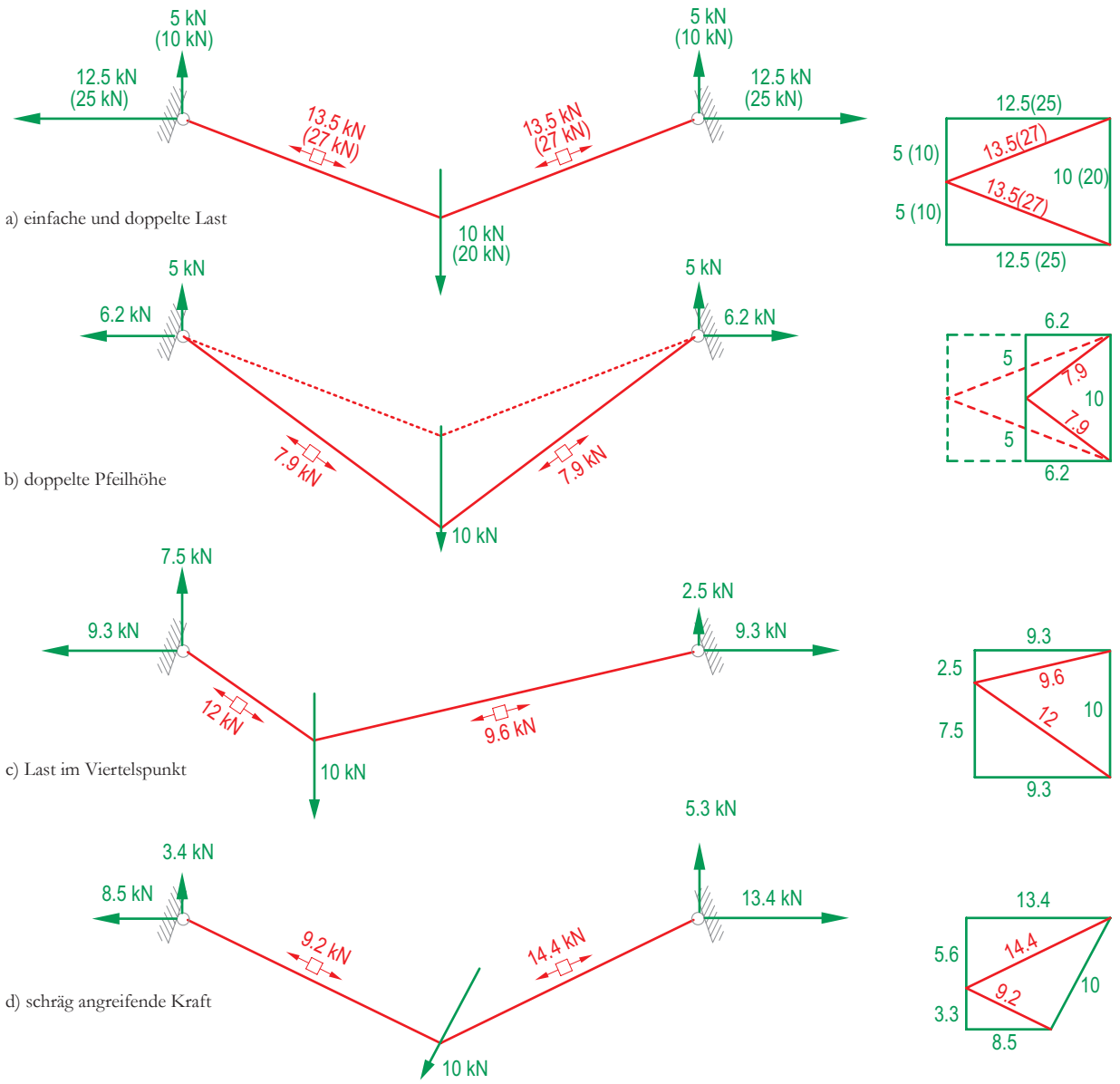


Bild 3.3: Einfluss der Spannweite, der Pfeilhöhe und der äusseren Kraft auf die Seilgeometrie

dem Kräftedreieck herausgemessen. Wegen der Symmetrie des Systems sind die inneren Kräfte auf beiden Seiten des Knotens selbstverständlich gleich gross.

Unter dem Begriff *Knoten* wird im Allgemeinen ein Subsystem verstanden, dessen Abmessungen gegen Null streben. Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel beschrieben, erkennt man durch Inspektion des Lageplans, ob in einem Seilsegment eine innere Druck- oder eine innere Zugkraft vorhanden ist: zieht die wirkende Knotenkraft am Subsystem bzw. am Knoten (innere Zugkraft im Tragelement) oder drückt sie gegen das Subsystem bzw. den Knoten (innere Druckkraft im Tragelement).

Anschliessend werden mit weiteren Subsystemen S_1 und S_2 die beiden Seilsegmente untersucht. Aus dem Bild 3.2b ist ersichtlich, dass aus Gleichgewichtsgründen an den beiden Enden der Seilsegmente die Kräfte Z_1 bzw. Z_2 angreifen müssen. Die Seilkräfte stimmen betreffend Intensität und Wirkungslinie mit den Knotenkräften überein, weisen aber in der Darstellung die entgegengesetzte Richtung auf.

Durch sinnvolles Bilden weiterer Subsysteme K_2 und K_3 können auf analoge Weise auch die Kräfte untersucht werden, welche das Seil auf die Auflagerpunkte ausübt. Auch in diesen beiden Punkten stimmen die Seilkräfte mit den Knotenkräften bezüglich Intensität und Wirkungslinie überein. Das Gleichgewicht am Knoten K_2 verlangt, dass zusätzlich zu Z_1 eine Auflagerkraft A gemäss Bild 3.2a angreift. Diese Kraft wird üblicherweise in eine horizontale Komponente A_H und in eine vertikale Komponente A_V aufgeteilt, deren Wirkungslinien sich im Lageplan mit der Wirkungslinie der Kraft Z_1 in einem Punkt, nämlich dem theoretischen Auflagerpunkt, schneiden müssen. Das entsprechende Kräftedreieck zur Ermittlung von Grösse und Richtung dieser Auflagerkraftkomponenten wird im Kräfteplan ergänzt. Beim rechten Auflager wird analog vorgegangen. Aus Symmetriegründen sind die Intensitäten der Auflagerkräfte identisch ($A_H = B_H$ und $A_V = B_V$). Die Hälfte der Last wird zum linken Auflager (A_V) und die andere Hälfte zum rechten Auflager (B_V) abgetragen.

Im Bild 3.2b sind die drei Kräftedreiecke der Knoten K_1, K_2 und K_3 so aneinandergesetzt worden, dass die Kräfte Z_1 und Z_2 deckungsgleich sind. Der entstandene Kräfteplan wird nach dem italienischen Ingenieur Antonio Luigi Cremona (1830-1903) häufig auch als *Cremonaplan* bezeichnet. Dieser spielt in der graphischen Statik eine wichtige Rolle. Um die Darstellung des Cremonaplanes zu vereinheitlichen, wird weiterhin die eingeführte Konvention befolgt, dass die *Kräfte im Kräfteplan in derjenigen Reihenfolge aufzutragen sind, welche sich ergibt, wenn die Kräfte des Lageplans im Uhrzeigersinn berücksichtigt werden.*

Als Resultat der Untersuchung können die Art der inneren Kräfte (Zug im Seil), die Intensitäten und die Auflagerkräfte im Lageplan dargestellt werden (Bild 3.2c). Es ist zu bemerken, dass bei diesem aus Seilsegmenten zusammengesetzten Tragwerk alle Seilsegmente auf Zug beansprucht sind.

3.2 Beeinflussung der inneren Kräfte durch Last und Geometrie des Tragwerks

Bei gleich bleibender Seilgeometrie werden die inneren Seilkräfte und die Auflagerkräfte proportional von der Intensität der angreifenden Last beeinflusst. Die Kräfte verdoppeln sich, wenn die Intensität der Last verdoppelt wird und umgekehrt. Zur Veranschaulichung dieser Tatsache sind im Bild 3.3a die Seil- und Auflagerkräfte eines Seiles unter einer Last von 10 kN denjenigen unter einer Last von 20 kN (Werte in Klammern) gegenübergestellt.

Um den Einfluss der Seilgeometrie zu veranschaulichen, wird die Pfeilhöhe f verdoppelt (Bild 3.3b). Infolge der grösseren Neigungen der beiden Seilsegmente verändern sich die Kräftedreiecke der drei Subsysteme und somit auch der Cremonaplan. Die vertikalen Kräfte bei den Auflagern sind gleich geblieben, d.h. zu jedem Auflager wird nach wie vor die Hälfte der Last übertragen. Die inneren Kräfte im Seil haben dagegen abgenommen, und deshalb haben sich auch die beiden horizontalen Auflagerkräfte halbiert.

Die Tatsache, dass die Pfeilhöhe variiert werden kann, ist eine wesentliche Erkenntnis für den Tragwerksentwurf. Es ist somit zu einer gegebenen Lastkonfiguration eine ganze *Familie von Seilgeometrien* möglich (vgl. Abschnitt 3.4). Durch die Variation der Pfeilhöhe wird jedoch nicht nur die Geometrie des Seiles verändert, sondern es werden auch die inneren Kräfte im Seil und die horizontalen Auflagerkräfte beeinflusst.

Wenn nicht nur die Pfeilhöhe f sondern gleichzeitig auch die Spannweite l halbiert wird, resultiert ein Seil mit der halben Länge und der gleichen Neigung wie das ursprüngliche Seil im Massstab 2:1. In diesem Fall bleiben, wie aus dem Cremonaplan ersichtlich, die Kräfte und die Beanspruchungen des Seiles unverändert.

Es ist somit offensichtlich, dass bei gegebener Lastgeometrie die inneren Kräfte und die Auflagerkräfte nur vom Verhältnis l/f und von der Intensität der Last abhängen. Das Verhältnis l/f wird als *Schlankheit* des Tragwerks bezeichnet.

Greift die Last dagegen bei gleich bleibender Spannweite und Pfeilhöhe nicht mehr in der Mitte des Seiles sondern im Viertelspunkt an, so wird aus dem Cremonaplan ersichtlich, dass sich die inneren Kräfte des Seiles und die Auflagerkräfte verändern (Bild 3.3c). Es wird nun ein grösserer Anteil der Last zum näher gelegenen

Auflager hin abgetragen. Die vertikale Komponente der entsprechenden Auflagerkraft beträgt dann 3/4 der gesamten Last Q, während der verbleibende Anteil der Last, nämlich 1/4 von Q, zum anderen Auflager abgetragen wird. Die beiden horizontalen Auflagerkräfte bleiben dagegen gleich. Dies ist dann der Fall, wenn die Lasten vertikal wirken.

Auch im allgemeinen Fall einer in eine beliebige Richtung wirkenden Kraft (Bild 3.3d) kann wie oben beschrieben vorgegangen werden. Die zweite Gleichgewichtsbedingung verlangt nach wie vor, dass sich die beiden geraden Segmente des Seiles in einem Punkt mit der Wirkungslinie des Seiles schneiden müssen. Wie aus dem Cremonaplan ersichtlich ist, haben dabei die beiden horizontalen Auflagerkräfte, im Gegensatz zum Fall mit vertikaler Last, jedoch nicht mehr die gleiche Intensität.

3.3 Tragwirkung eines Seiles unter zwei vertikalen Lasten

Gegeben sei ein Seil unter zwei gleich grossen vertikalen Lasten Q = 5 [kN], welche in 1/4 und 3/4 der Spannweite angreifen (Bild 3.4a). Das Seil nimmt unter diesen Bedingungen eine aus drei Segmenten bestehende polygonale Form an. Infolge der symmetrischen Ausbildung des Seiles verläuft das mittlere Seilsegment dabei parallel zur Verbindungslinie der beiden Auflager.

Zur Untersuchung des Systems können die Subsysteme K_1, K_2, K_3 und K_4 eingeführt werden (Bild 3.4c). Aus dem zugehörigen Cremonaplan geht eindeutig hervor, dass jede der beiden Lasten einzig zum näher gelegenen Auflager hin abgetragen wird, und dass die innere Kraft des mittleren Seilsegmentes der horizontalen Auflagerkraft entspricht.

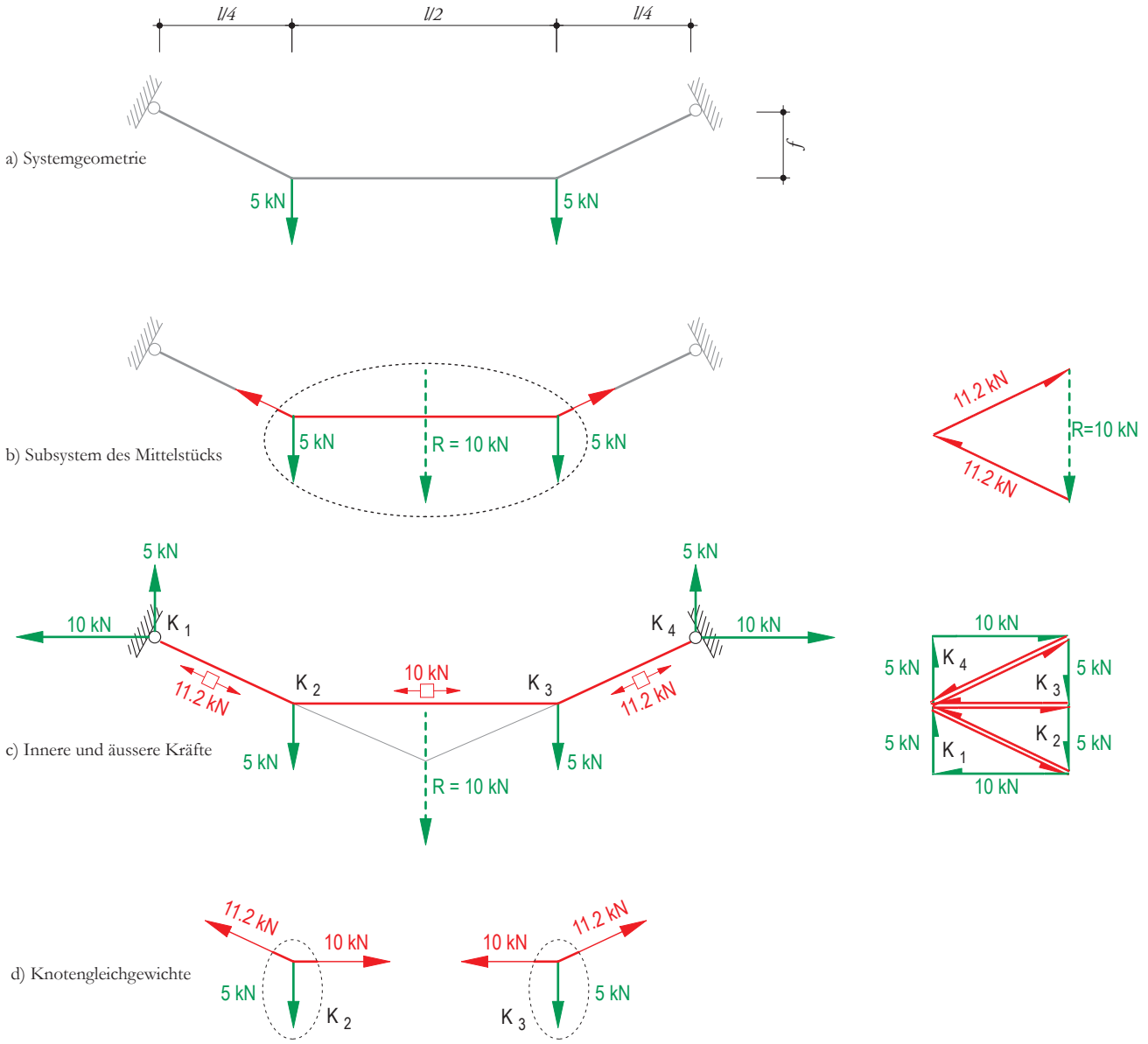


Bild 3.4: Seilkräfte und Seilform bei zwei vertikalen Lasten

Es fällt auf, dass der Kräfteplan sehr ähnlich ist wie derjenige des Seiles mit einer in Feldmitte wirkenden Last von 10 [kN]. Unter der Bedingung, dass die Resultierende $R = 2 \cdot Q = 10$ [kN] der beiden Lasten in Feldmitte wirkt, und die Pfeilhöhe $2 \cdot f$ beträgt, weisen die beiden äusseren Seilsegmente die gleichen inneren Kräfte auf wie das Seil unter den beiden Lasten Q, und auch die Auflagerkräfte sind gleich. Dieser Sachverhalt ist in den Bildern 3.4b und 3.4c dargestellt. Wird nämlich der mittlere Bereich des Seiles mit den beiden Lasten zu einem einzigen Subsystem zusammengefasst, so spielt es keine Rolle mehr, ob die beiden Kräfte Q oder deren Resultierende $R = 2 \cdot Q$ berücksichtigt werden. Es ist lediglich darauf zu achten, dass die Achsen der beiden äusseren Seilsegmente sich mit der Wirkungslinie der Resultierenden R in einem Punkt schneiden müssen.

Wie weiter unten gezeigt, wird diese Art der Betrachtung mittels Resultierender zur Lösung des allgemeinen Falles eines Seiles unter zwei oder mehreren beliebig grossen und beliebig gerichteten Kräften, sowie eines Seiles unter verteilten Lasten herangezogen.

3.4 Tragwirkung eines Seiles unter mehreren beliebig gerichteten Lasten

Gesucht werden die Form sowie die inneren Kräfte und die Auflagerkräfte eines Seiles, welches in der Lage ist, die vier in Bild 3.5 dargestellten, beliebig gerichteten Kräfte zu den gegebenen Auflagern abzutragen. Das Lösungsverfahren stützt sich auf die im vorigen Abschnitt 3.3 beschriebenen Betrachtungen.

Zuerst wird die Resultierende R der Lasten entweder schrittweise gemäss Abschnitt 2.10 oder mit Hilfe eines Seilpolygons gemäss Abschnitt 2.11 ermittelt (Bild 3.5a).

Im zweiten Schritt wird ein Seil konstruiert, welches durch die Auflager verläuft und in der Lage ist, die Resultierende R zu tragen (Bild 3.5b). Dabei kann die Pfeilhöhe des gestrichelt eingezeichneten Seiles unter R frei gewählt werden. Wie beim Beispiel im Abschnitt 3.3 stimmt auch in diesem Fall im Bereich der beiden Auflager die Geometrie des Seiles unter R überein mit derjenigen des Seiles unter den vier Lasten. Die inneren Kräfte Z_1 und Z_5 können somit im Cremonaplan eindeutig mit Hilfe des Kräftedreiecks R - Z_1 - Z_5 (vgl. Kräfteplan) ermittelt werden. Aus diesem Dreieck können dann im Cremonaplan schrittweise die Auflagerkräfte bestimmt und in den Lageplan übertragen werden.

Dazu werden in einem dritten Schritt die Seilzwischensegmente konstruiert und deren inneren Kräfte ermittelt. Sowohl die Geometrie als auch die inneren Seilkräfte verändern sich sprungartig an den Punkten, an welchen die Wirkungslinien der Lasten das Seil schneiden. In diesen Punkten wird das Seil umgelenkt. Sowohl die Neigung der Seilzwischensegmente als auch die Intensität der zugehörigen inneren Kräfte können aus dem Cremonaplan herausgelesen werden und hierdurch die Seilzwischensegmente progressiv im Lageplan konstruiert werden. Dabei ist zu beachten, dass die einzelnen Dreiecke im Cremonaplan das Knotengleichgewicht in den entsprechenden Umlenkpunkten des Lageplanes beschreiben.

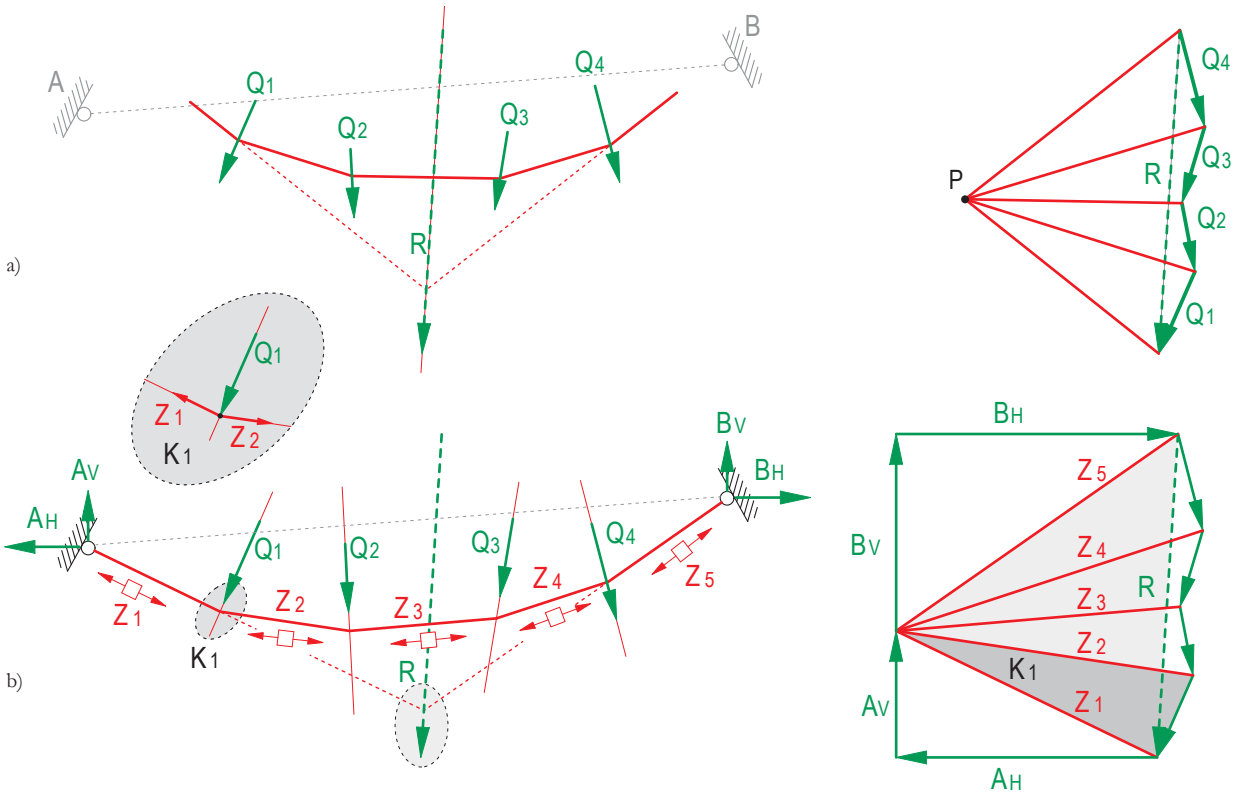


Bild 3.5: Ermittlung von Seilkräften und Seilform bei mehreren beliebig gerichteten Kräften

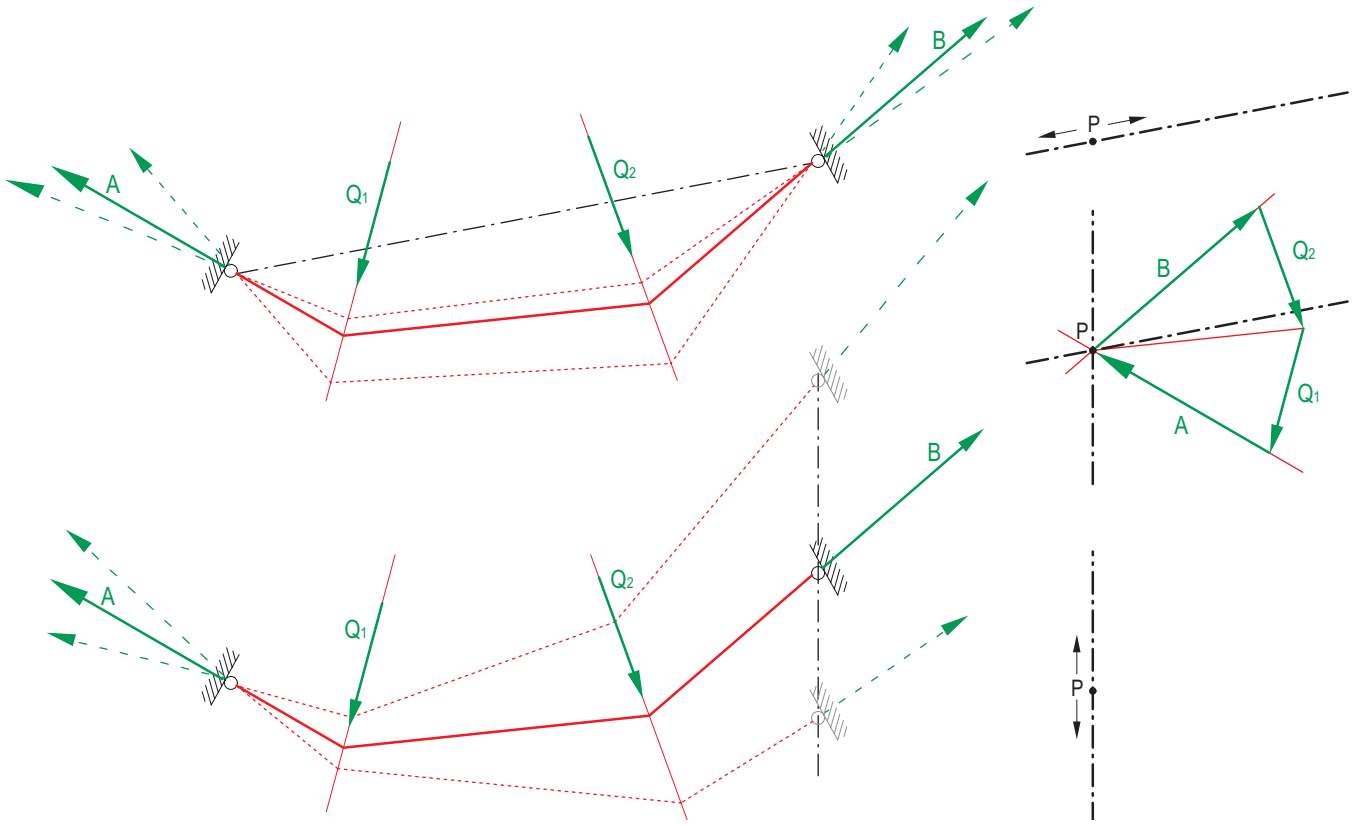


Bild 3.6: Durchlaufen der Familie von Seilgeometrien durch Variation der Lage des Pols

Mit der Übertragung der Seilkräfte in den Lageplan wird ersichtlich, dass alle inneren Kräfte an den Knoten ziehen, was bedeutet, dass das Seil überall innere Zugkräfte aufweist. Diese Betrachtung scheint im vorliegenden Fall trivial zu sein; sie gibt dagegen bei der Behandlung komplizierter Tragwerke systematisch darüber Auskunft, ob in einem Tragelement eine innere Zug- oder eine innere Druckkraft vorhanden ist.

Bei der Konstruktion des Seilzuges im Lageplan stellt sich beim letzten Knoten heraus, ob das Vorgehen korrekt durchgeführt wurde. Liegt der Schnittpunkt der beiden Seilsegmente nämlich nicht auf der Wirkungslinie der im Knoten angreifenden Kraft, so ist die Seilgeometrie nicht korrekt und die zweite Gleichgewichtsbedingung daher nicht erfüllt.

Die beschriebene Konstruktion eines Seiles unter mehreren Lasten lässt die physikalische Bedeutung des Seilpolygons zur Ermittlung der Resultierenden (vgl. Abschnitt 2.11) erkennen: Dieses Seilpolygon kann nämlich als ideelles *Hilfsseil* angesehen werden, welches infolge seiner polygonalen Form die Lasten zu tragen vermag!

Zwischen Lageplan und Kräfteplan besteht im Allgemeinen eine enge Beziehung. So beeinflusst die Veränderung der Pfeilhöhe oder eine vertikale Verschiebung eines der Auflager den Cremonaplan. Die Veränderung der Pfeilhöhe bewirkt eine Verschiebung des *Pols* P entlang einer zur *Auflagerlinie* parallelen Achse (vgl. auch Bild 3.3b), die vertikale Verschiebung eines Auflagers bewirkt dagegen eine vertikale Verschiebung des Pols im Cremonaplan. Umgekehrt ergibt sich aus diesem Zusammenhang aus der Variation des Pols im Cremonaplan die Möglichkeit einer gezielten Kontrolle der Seilgeometrie und damit der Seil- und Auflagerkräfte (Bild 3.6).

3.5 Tragwirkung eines Seiles unter gleichmässig verteilter Belastung

Bei den bisher behandelten Beispielen bestehen die Seile aus geraden Liniensegmenten welche bei den Wirkungslinien der Lasten abrupt die Richtung ändern. Der Seilverlauf entspricht also einem Polygon welches definiert wird durch die angreifenden äusseren Lasten, die Lage der Auflager und die gewählte Pfeilhöhe. Die entsprechende Seilform wird häufig ebenfalls als Seilpolygon bezeichnet.

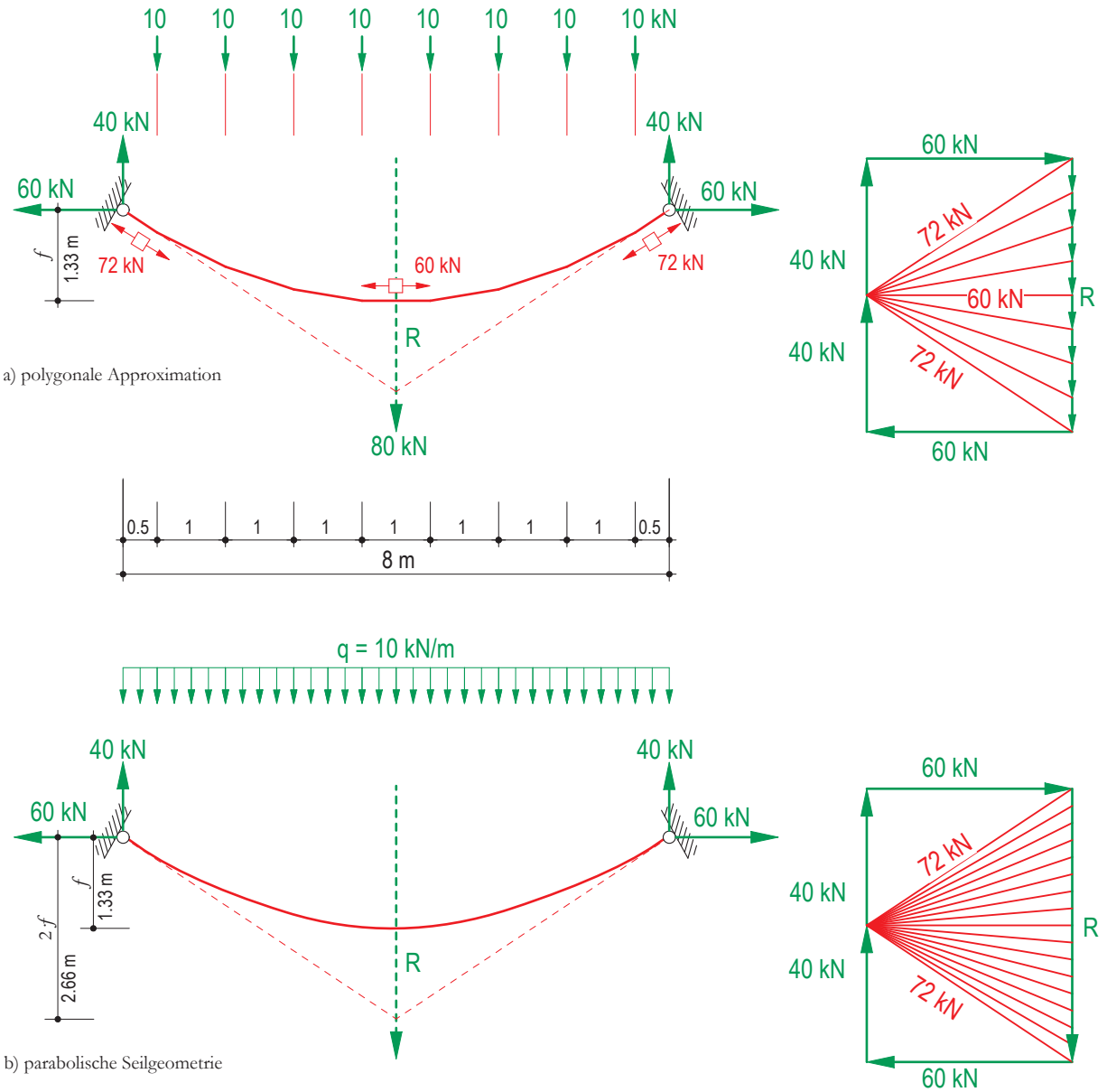
Oft sind bei Seiltragwerken keine konzentrierten, sondern verteilte Lasten vorhanden etwa die Eigenlasten des Tragwerks oder Schneelasten. Diese verteilten Lasten können interpretiert werden als Summe vieler infinitesimaler konzentrierter Lasten welche nebeneinander angeordnet sind. Das Seilpolygon wird sich also aus unendlich vielen Strichen mit infinitesimaler Länge zusammensetzen, oder anders gesagt, das Seilpolygon wird zu einer kontinuierlichen gekrümmten Kurve.

Dieser Zusammenhang wird im Folgenden genauer betrachtet. Dazu soll zuerst ein Seil unter acht Einzel-

lasten à 10 [kN] untersucht werden welche in einem gleichbleibenden Abstand von *l*/8 = 1.0 m angeordnet sind und deren zwei äussere Lasten einen Abstand von *l*/16 = 0.5 m zu den Auflagern aufweisen (Bild 3.7a).

Das Lösungsverfahren wurde bereits im Abschnitt 3.4 vorgestellt. In einem ersten Schritt wird dazu im Kräfteplan die Resultierende *R* = 80 [kN] ermittelt. Die Intensität der Resultierenden entspricht der Summe der acht Lasten und die Wirkungslinie verläuft aus Symmetriegründen vertikal durch die Feldmitte. Anschliessend wird die Pfeilhöhe eines ideellen Seiles frei gewählt (im vorliegenden Fall zu 2.66 m) und die sich daraus ergebende Seilgeometrie eingezeichnet. Die inneren Kräfte der äusseren Seilsegmente sowie die Auflagerkräfte können nun im Kräfteplan aufgezeichnet werden. Anschliessend können die Kräfte aller Zwischensegmente im Cremonaplan aufgetragen und in den Lageplan übertragen werden. Die Pfeilhöhe *f* für das Seil unter den acht Lasten beträgt 1.33 m und somit *genau die Hälfte* derjenigen des ideellen Seiles unter *R*. Weiter ist zu erkennen, dass die Form des Seiles sich einer *Parabel*, also einer Kurve zweiter Ordnung annähert.

Im Bild 3.7b ist zudem ein Seil unter einer gleichmässig verteilten Last *q* = 10 [kN/m] dargestellt. Um die verteilten Lasten von den konzentrierten Lasten zu unterscheiden, werden die verteilten Lasten mit Kleinbuchstaben *q* im Gegensatz zu den konzentrierten Lasten *Q* bezeichnet. Die Einheit der verteilten Lasten beträgt [kN/m] oder [N/m]. Die Resultierende der verteilten Lasten des betrachteten Seiles hat, wie das Seil unter acht Lasten à 10 [kN], die Intensität $R = q \cdot l = 80$ [kN] und die Wirkungslinie liegt aus Symmetriegründen in Feldmitte. Wird auch in diesem Fall die Pfeilhöhe des ideellen Seiles zu 2.66 m gewählt, so ergibt sich der gleiche Cremonaplan für die Resultierende *R*, ebenso die gleichen Seilkäfte bei den Auflagern und somit die gleichen Auflagerkräfte wie im Fall des Seiles unter acht



a) polygonale Approximation

b) parabolische Seilgeometrie

Bild 3.7: Seilkräfte und Seilform bei gleichmässig verteilter Belastung

Einzellasten. Die Pfeilhöhe des Seiles unter verteilten Lasten entspricht wie im Beispiel des Seiles unter acht Lasten exakt der Hälfte der Pfeilhöhe des ideellen Seiles unter *R*. Dies kann nachgewiesen werden, indem die Anzahl der einzelnen Lasten progressiv erhöht wird, mit dem Ziel, die Lösung gegen diejenige mit der verteilten Belastung konvergieren zu lassen. Weiter kann gezeigt werden, dass die Seilkurve einer verteilten Last mit konstanter Intensität exakt einer Parabel entspricht. Diese kann selbstverständlich auch mathematisch hergeleitet werden; die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung sprengt jedoch den Rahmen des vorliegenden Kurses und ist für die weitere graphische Untersuchung entsprechender Tragwerke nicht erforderlich. Die Seilkräfte können aus dem Cremonaplan für jede beliebige Seilneigung und somit in jedem beliebigen Punkt des Seiles direkt herausgemessen werden.

3.6 Tragwirkung eines Seiles unter seiner Eigenlast

Ein Seil welches nur durch seine Eigenlast beansprucht wird verhält sich ähnlich wie ein Seil unter gleichmässig verteilten Lasten. Die Last ist jedoch streng genommen nicht mehr gleichmässig verteilt, weil das Seil ein pro Längeneinheit zwar konstantes Gewicht aufweist, die Neigung des Seiles jedoch variiert. Die Intensität der verteilten Last pro horizontale Längeneinheit des Tragwerks wird daher umso grösser, je stärker das Seil geneigt ist. Die Form des Seiles muss also leicht von derjenigen der Parabel abweichen.

Diejenige Form, welche das Seil unter Eigenlast annimmt, wird als *Kettenlinie* bezeichnet und kann mathematisch durch eine Cosinus Hyperbolicus-Funktion beschrieben werden (Bild 3.8). Wenn das Verhältnis der Pfeilhöhe zur Spannweite nicht zu gross ist und die Neigung des Seiles in der Nähe der Auflager eine gewisse Grenze nicht überschreitet, ist der Unterschied zwischen der Kettenlinie und der Parabel jedoch vernachlässigbar klein.



Bild 3.9: Portugisischer Expo-Pavillon, Lissabon, 1997-98, Arch.: Alvaro Siza, Ing.: Segadães Tavares e Associados

Alvaro Sizas Entwurf für den Portugiesischen Expo-Pavillion in Lissabon ist ein anschauliches Beispiel für die Geometrie einer Seilkonstruktion unter Eigenlast (Bild 3.9). Weil die Eigenlast des Stahlbetondachs über die abgewickelte Länge des Daches infolge seiner konstanten Stärke gleichmässig verteilt ist und das Gewicht des Daches mögliche Nutzlasten dominiert, nimmt das Dach im Schnitt die Form einer Kettenlinie an.

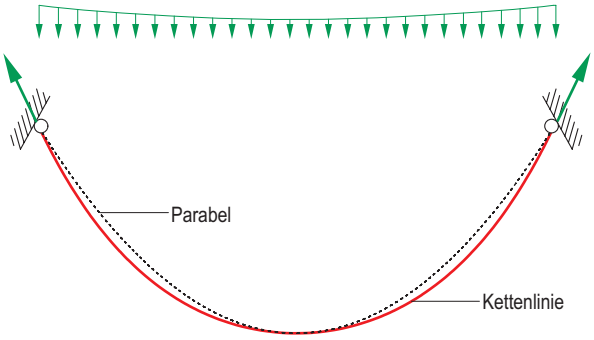


Bild 3.8: Vergleich von Kettenlinie und Parabel

3.7 Bauwerke mit an Seilen aufgehängten Bauteilen

Bei Bauten wirken die Eigenlasten respektive die veränderlichen Nutzlasten häufig nicht direkt am tragenden Seil, sondern werden mittels Hilfsseilen an dieses angehängt. Hängebrücken sind hierfür ein weit verbreitetes Beispiel. Weil das Gewicht der Fahrbahn in horizontaler Richtung in der Regel konstant verteilt und wesentlich grösser als das Gewicht der Aufhänge- und der Tragseile ist, entspricht die resultierende Form der tragenden Seile einer Parabel. Bei der Golden Gate Bridge in San Francisco nahmen die Tragseile im Bauzustand zunächst die Form einer Kettenlinie an (Bild 3.10 links). Erst während des Einbaus der Fahrbahnplatte näherte sich ihre Form sukzessiv derjenigen der Parabel an. Da die Aufhängeseile konzentrierte Einzelkräfte auf die Tragseile übertragen, sind die Tragseile im Endzustand streng genommen nicht parabelförmig, sondern weisen eigentlich eine polygonale Form auf (Bild 3.10 rechts).

Ein über mehrere Felder verlaufendes Seiltragwerk wie die Golden Gate Bridge kann mit Hilfe von Subsystemen genauer untersucht werden (Bild 3.11). Die mittlere Spannweite hat eine ähnliche Geometrie wie



Bild 3.10: Golden Gate Bridge, San Francisco, 1933-37, Arch.: Irving F. Morrow, Ing.: Joseph B. Strauss & Othmar Ammann

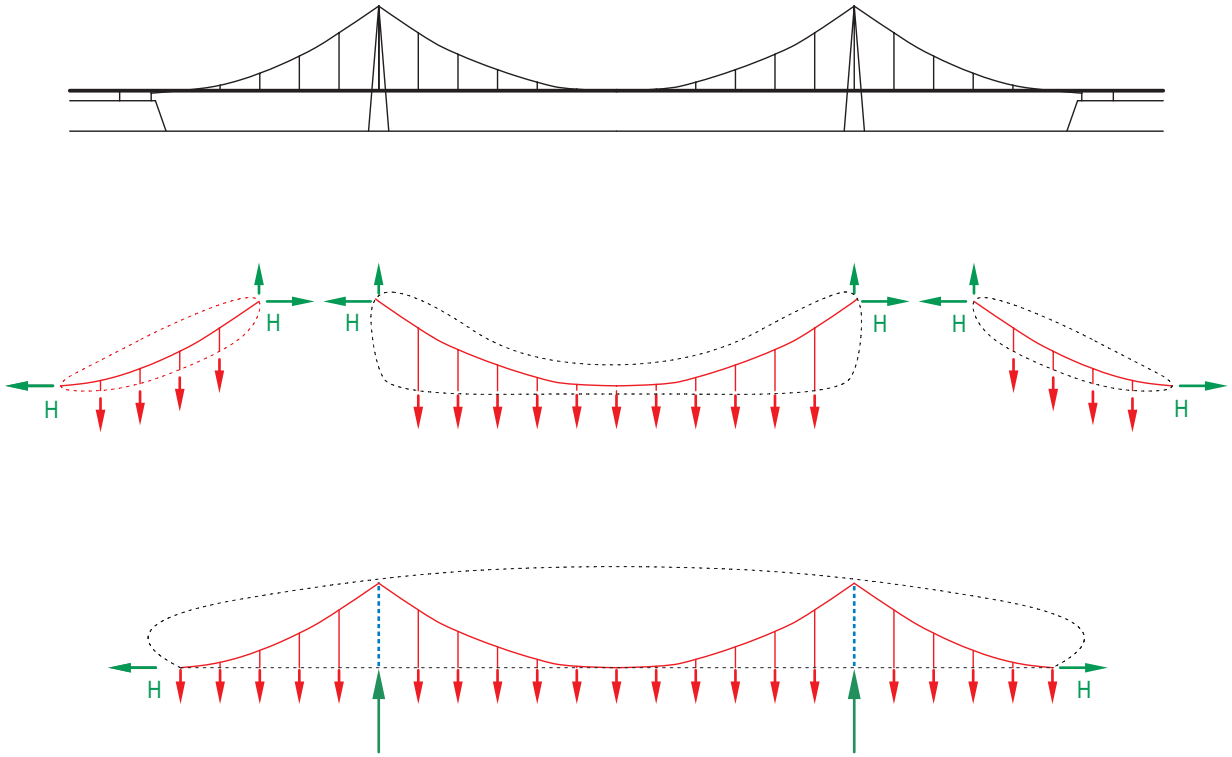


Bild 3.11: Subsysteme einer Hängebrücke

das bereits untersuchte System. Die vertikalen Auflagerkraftkomponenten des mittleren Tragseiles werden von den Pylonen, und die horizontalen Komponenten werden von den Seilen der benachbarten Spannweiten aufgenommen. Letztere haben ihre Auflager auf unterschiedlichen Höhen: eines am oberen Ende der Pylone, und eines bei den Verankerungsblöcken, wo die horizontalen Komponenten der Seilkräfte in das Erdreich eingeleitet werden. Alternativ kann das gesamte Tragseil auch als ein einziges Tragelement betrachtet werden, welches sich von einem Ende der Brücke bis zum anderen ausdehnt. In diesem Fall schneidet das Subsystem

1. die beiden Enden des Tragseils, auf welche die zwei Auflagerkräfte bei den Verankerungsblökken wirken,
2. alle Aufhängekabel, auf welche die Lasten wirken und
3. die beiden auf Druck beanspruchten Pylone, auf welche nach oben gerichtete Auflagerkräfte wirken.

Die Form, welche das Tragseil auf seiner ganzen Länge einnimmt, ergibt sich aus einem Seilzug unter den zwei Auflagerkräften an den Enden und den nach unten gerichteten Lasten sowie den nach oben gerichteten Kräfte der beiden Pylone.

Tragsysteme dieser Art finden auch bei Gebäuden Anwendung. So wird bei der Papierfabrik Burgo von Pier Luigi Nervi (Bild 3.12) das Dach mit Hilfsseilen an den Tragseilen aufgehängt. Wie bei den Hängebrücken ist auch in diesem Fall die abgehängte Last wesentlich schwerer als die Seile, so dass das Seilpolygon sich der Parabel annähert. Die tragenden Seile der mittleren Spannweite übertragen wie zuvor die Kräfte auf die Pylone. Allerdings kompensieren sich die Horizontalkomponenten der Tragseile zweier benachbarter Felder

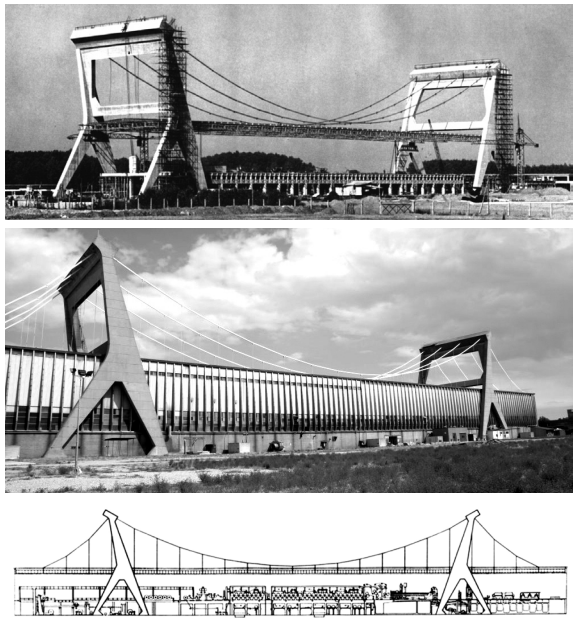


Bild 3.12: Papierfabrik Burgo, Mantua, 1961-62, Arch. & Ing.: Pier Luigi Nervi

nicht vollständig; die Pylonkräfte sind deshalb nicht mehr vertikal gerichtet.

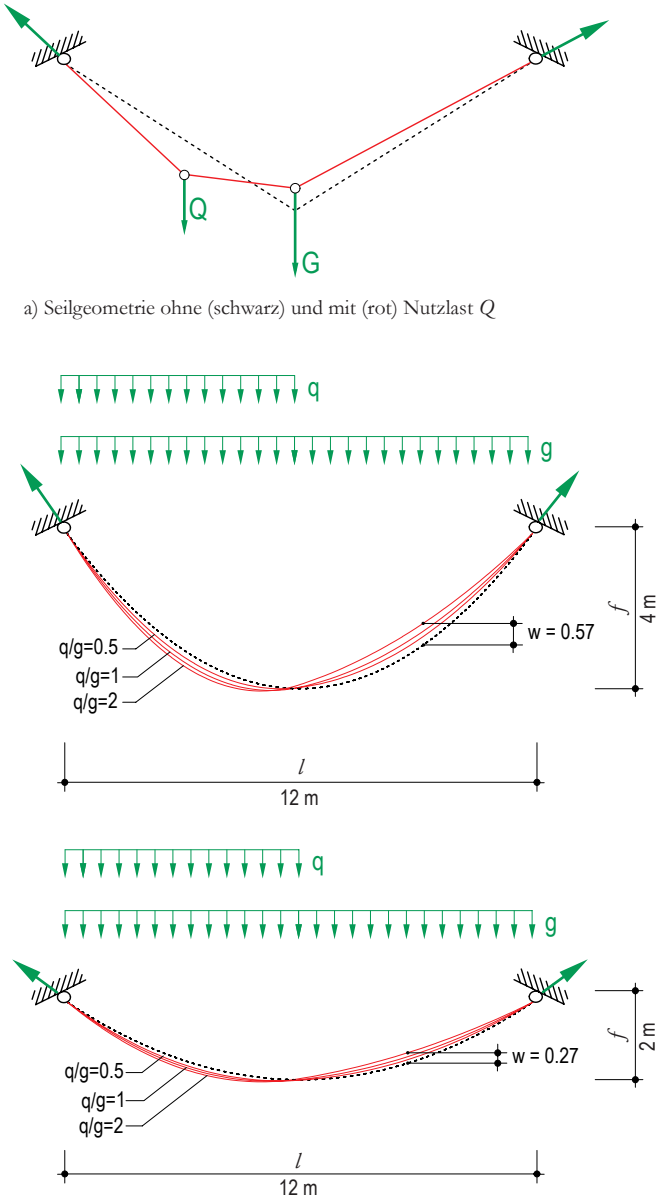
Im Bauzustand (Bild 3.12 oben) liegt ein reines Seiltragwerk vor. Im fertigen Zustand unterscheidet sich die Abtragung der äusseren Seilkräfte der seitlichen Spannweiten dagegen von derjenigen der behandelten Hängebrücke: die Seilkräfte werden nicht ins Erdreich, sondern horizontal in das Dach eingeleitet, so dass das Dach über seine gesamte Länge mit einer inneren Druckkraft beansprucht ist. Es handelt sich somit streng genommen nicht mehr um ein reines Seiltragwerk, sondern um ein kombiniertes Bogen-Seiltragwerk gemäss Kapitel 8.

3.8 Formänderungen des Tragseiles infolge ungleichmässig verteilter Nutzlasten oder Auflagerverschiebung

Wenn auf ein Seil zusätzlich zu den ständigen Lasten auch noch an einem beliebigen Ort veränderliche Lasten wirken, so beeinflussen diese die Form des Seiles. Im Bild 3.13a ist ein Seil dargestellt auf welches eine ständige Last *G* in Feldmitte und eine veränderliche Last *Q* im Viertelspunkt wirkt. Ohne die Last *Q* würde das nur durch die ständige Last *G* beanspruchte Seil eine symmetrische Dreiecksform annehmen. Durch die zusätzlich veränderliche Last *Q* nimmt das Seil jedoch eine aus drei Segmenten bestehende polygonale Form an. Die zusätzliche Last *Q* bewirkt somit eine deutlich sichtbare Formänderung des Seiles.

Ein Seil unter verteilten Lasten verhält sich ähnlich. Im Bild 3.13b ist ein Seil dargestellt, auf welches die ständige Last *g* gleichmässig verteilt auf der gesamten Seillänge angreift. Zusätzlich wirkt eine einseitige veränderliche Last *q*. Bei dieser kann es sich zum Beispiel um eine Schneelast handeln welche infolge Windverwehungen nur auf der einen Hälfte der Spannweite angreift. Das Bild zeigt die sich ergebende Veränderung der ursprünglich parabolischen Seilform unter drei verschiedenen Intensitäten der veränderlichen Last *q* und die resultierende maximale vertikale Verschiebung w.

Massgebend für die Formänderung des Seiles ist im Allgemeinen nicht primär der absolute Wert der veränderlichen Last *q*, sondern vor allem das Verhältnis der veränderlichen Last *q* zur ständigen Last *g*. Wird dieses Verhältnis vergrössert, so resultieren grössere Formänderungen. Weiter kann gezeigt werden, dass die Schlankheit *l/f* die Formänderungen des Seiles bei einseitiger Nutzlast beeinflusst. So sind bei Seilen mit kleiner Schlankheit *l/f* die Formänderungen grösser als bei Seilen mit grosser Schlankheit.



a) Seilgeometrie ohne (schwarz) und mit (rot) Nutzlast *Q*

b) Formänderung bei Schlankheit 3 (oben) und 6 (unten)

Bild 3.13: Veränderung der Seilform infolge veränderlicher Nutzlasten

Natürlich bewirkt auch eine horizontale Verschiebung der Auflager eine Formänderung des Seiles, da hierdurch die Schlankheit beeinflusst wird. Ein Zusammenrücken der Auflager führt zu einer Reduktion der Spannweite bei unveränderter Seillänge, was eine Einsenkung des Seiles vor allem in Feldmitte zur Folge hat.

3.9 Massnahmen zur Begrenzung der Formänderungen infolge veränderlicher Lasten

Die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Formänderungen unter veränderlichen Lasten können die Nutzung des Tragwerkes beeinträchtigen. So muss zum Beispiel bei Dächern die mögliche Formänderung derart begrenzt werden, dass kein Schaden an den angrenzenden tragenden und nicht tragenden Bauteilen, insbesondere an den Fassaden, entstehen kann. Zudem können über eine bestimmte Grenze hinausgehende Formänderungen zu Problemen mit der Dachentwässerung führen.

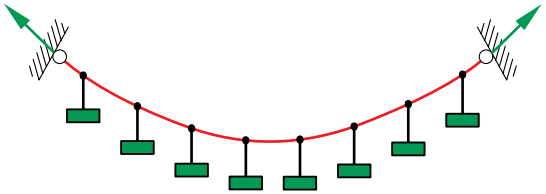


Bild 3.14: Seilstabilisierung durch Lastvergrösserung



Bild 3.15: Maison des Jeunes et de la Culture, Firminy, 1961-65, Arch.: Le Corbusier

In vielen konkreten Fällen ist es daher unumgänglich, konstruktive Massnahmen zu treffen, um die Formänderung des Seiles unter den veränderlichen Nutzlasten zu begrenzen. Dazu sind Eingriffe ins Tragwerk erforderlich welche dessen Gestaltung je nach Lösungsansatz wesentlich beeinflussen können.

Vergrösserung der ständigen Lasten

Eine erste Möglichkeit, den Formänderungen eines Seiles unter veränderlichen Nutzlasten entgegenzuwirken, besteht in der *Vergrösserung der ständigen Lasten* (Bild 3.14). Infolge des kleineren Verhältnisses der veränderlichen Lasten zu den ständigen Lasten reduziert sich der Einfluss der veränderlichen Lasten auf die resultierende Seilform. Gleichzeitig erhöhen sich jedoch die inneren Kräfte im Seil sowie die Auflagerkräfte. Trotz dieses Nachteils wird dieses Vorgehen manchmal benutzt, insbesondere bei nicht zu grossen Spannweiten. wie etwa in der von Le Corbusier projektierten Maison des Jeunes et de la Culture (Bild 3.15). Das Dach besteht hierbei aus an Seilen aus hochfestem Stahl aufgehängten Plattenelementen aus Stahlbeton, mit den Platten als stabilisierende ständige Lasten.

Mit der Vergrösserung der ständigen Lasten kann ein weiteres Problem der Seiltragwerke entschärft werden: wenn die ständigen Lasten zu klein sind, können die durch Wind erzeugten Sogkräfte auf die äussere Oberfläche des Daches oder die Zunahme des Drucks im inneren der Konstruktion infolge Wind zum Abheben des Daches führen.

Seilbalken

Eine Lösung, welche ähnlich funktioniert wie die bereits diskutierte, besteht darin, vertikale Kräfte am Seil angreifen zu lassen welche nicht aus Gravitationslasten bestehen, sondern von einem anderen Seil ausgeübt werden. Das Tragwerk besteht dann aus einem *Tragseil* und einem mit Verbindungsseilen mit diesem verbundenen *gegenläufig gekrümmten Spannseil*; das entsprechende Tragwerk wird als *Seilbalken* bezeichnet.

Bild 3.16 zeigt die inneren Kräfte eines entsprechenden Tragwerks, welche durch die Vorspannung des unteren Seiles oder der Verbindungsseile im Tragwerk erzeugt werden. Durch die Bildung von drei Subsystemen, welche das Tragseil, das Spannseil und die Verbindungs-

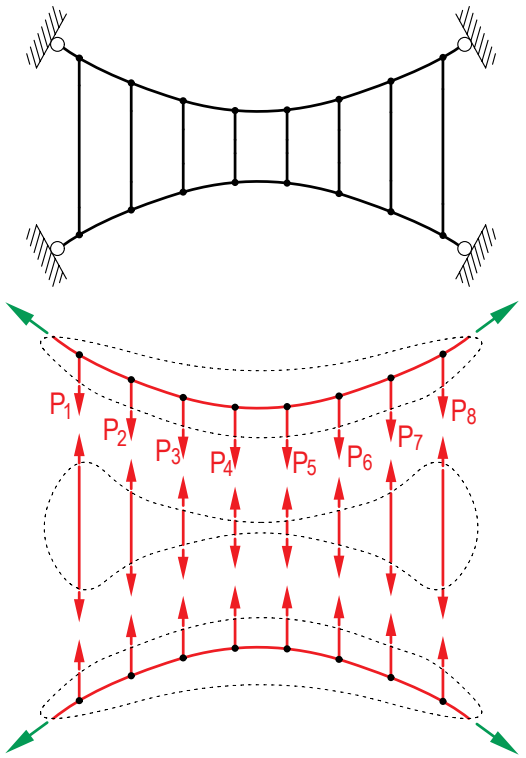


Bild 3.16: innere Kräfte eines Seilbalkens

seile abtrennen, können die inneren Kräfte dargestellt werden, welche in den einzelne Tragelementen wirken, ohne dass eine äussere Last am Tragwerk angreift.

Die Kräfte, welche beim Spannen des Spannseiles ins Tragwerk eingeleitet werden, steifen das tragende Seil aus, und umgekehrt wird auch das Spannseil über die Hilfsseile durch das tragende Seil ausgesteift. Mit dieser Lösung wird auch das Problem des Abhebens der Dachkonstruktion infolge Windsog vermieden.

Seilbalken können unterschiedliche Formen annehmen. Beim Entwurf solcher Tragelemente bietet sich bei gegebener Spannweite die Variation folgender Parameter an: die *Pfeilhöhe* des *tragenden Seils*, diejenige des *Spannseils*, der *Abstand zwischen den beiden Seilen* und die *Geometrie der Verbindungsseile*. In Bild 3.17 sind eine Anzahl von Varianten mit unterschiedlichem Abstand zwischen dem tragenden und dem gespannten Seil dargestellt.

Falls sich das tragende Seil und das Spannseil überlappen, sind die Verbindungselemente nicht mehr auf Zug, sondern auf Druck beansprucht und können somit nicht mehr aus Seilen bestehen, sondern müssen als Druckstreben ausgebildet werden. Durch Variation der Abstände der Verbindungsseile erhält man unterschiedliche Verläufe der Trag- und der Spannseile. Wenn diese Abstände sehr klein sind, nähert sich die Form des Seiles einer kontinuierlich gekrümmten Kurve an. Die Verbindungsseile können auch als Membran ausgebildet sein: in diesem Fall nehmen die Seile tatsächlich die Form einer Kurve an.

Die Vielfalt der Formen ist somit bei den Seilbalken sehr gross. Sie haben aber alle ein Tragseil mit einer gegen die ständigen Lasten nach oben gerichteten Krümmung und einem im Gegensinn gekrümmten Spannseil. Der Ingenieur David Jawerth entwickelte in den 1950er Jahren vorgespannte Seilbalken, bei welchen die Verbindungsseile nicht vertikal, sondern geneigt angeordnet sind, so dass zwei benachbarte Seile jeweils

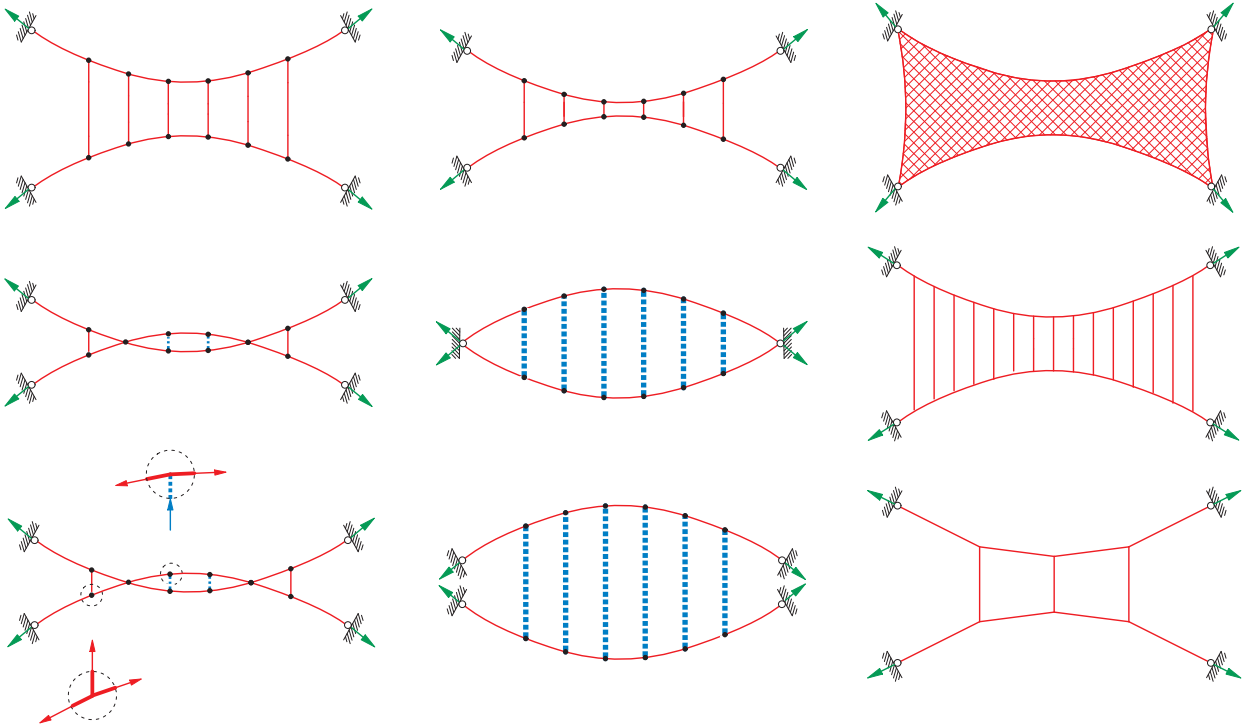


Bild 3.17: Verschiedene Typen von Seilbalken

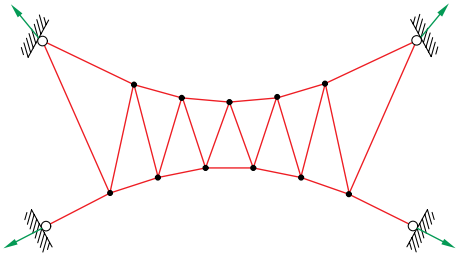


Bild 3.18: Seilbalken mit diagonalen Verbindungsseilen nach David Jawerth



Bild 3.19: Kansai International Airport, Osaka, 1988-94, Arch.: Renzo Piano, Ing.: Peter Rice

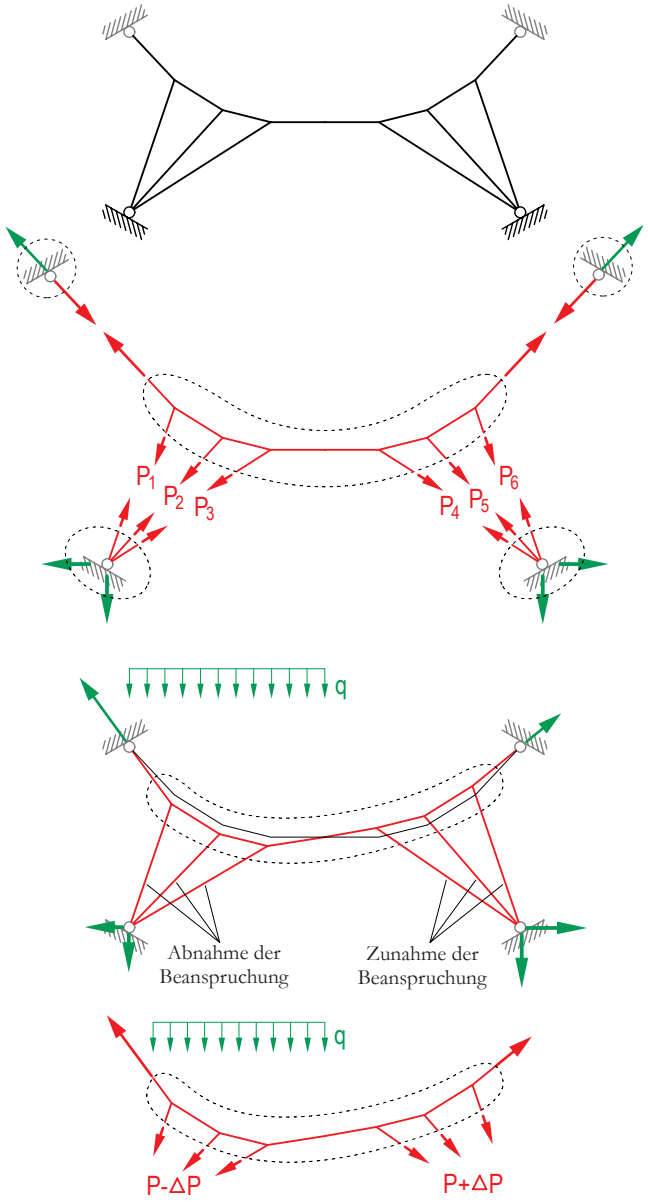


Bild 3.20: Subsysteme eines mit Spannseilen stabiliserten Tragseils

oben oder unten in einem Punkt zusammenlaufen (Bild 3.18). Entsprechende Tragwerke sind ausserordentlich effizient da sie unter nicht symmetrischen Lasten nur sehr geringe Formänderungen aufweisen. Die Begründung liegt darin, dass sie sich ähnlich verhalten wie die im Kapitel 10 behandelten Fachwerke.

Allgemein weisen die Seilbalken dank ihrer überwiegend auf Zug beanspruchten Elemente eine *grosse Leichtigkeit* und vor allem auch eine *grosse Transparenz* auf. Aus diesem Grund hat der Ingenieur Peter Rice diese in den 80er Jahren als stabilisierende Tragelemente bei grossen Verglasungen eingesetzt mit der Funktion als Tragelemente zur Aufnahme der Windlasten (Bild 3.19). Grundsätzlich ist betreffend Tragwerksentwurf festzuhalten, dass die Anordnung von Spannseilen, sowie auch andere weiter unten aufgezeigte Möglichkeiten zur Reduktion der Formänderungen des Tragseiles, einen geometrischen und gestalterischen Eingriff in das Lichtraumprofil des sich unterhalb des Tragwerkes befindenden Raumes bedeuten.

Stabilisierende Spannseile

Ein mit den Seilbalken verwandtes Tragwerk besteht aus einem Tragseil und einer Serie von stabilisierenden Spannseilen, welche zwischen dem Tragseil und zusätzlichen Auflagern verlaufen (Bild 3.20). Auch die Wirkungsweise ist verwandt: die vorgespannten stabilisierenden Seilkräfte bewirken Zugkräfte im Tragseil und verhindern dessen Anheben im weniger belasteten Bereich. Das Tragseil möchte sich in diesem Bereich nach oben anheben, was zu einer Zunahme der Kräfte in den stabilisierenden Seilen führt. Umgekehrt verhält sich das Tragseil im Bereich der einseitig wirkenden Nutzlast: hier möchte es sich nach unten senken, was zu einer Entlastung der stabilisierenden Seile führt. Der so entstandene Ausgleich führt zu einer quasi gleichmässi-



Bild 3.21: Messehalle 26, Hannover, 1995-96, Arch.: Herzog & Partner, Ing.: Schlaich Bergermann & Partner

gen Belastung des Tragseiles unter aller an ihm angreifenden Lasten: dies sind die einseitige Nutzlast und die im Bereich der Nutzlast kleiner und im restlichen Bereich grösser gewordenen Kräfte in den Verbindungsseilen. Ein Beispiel für die Anwendung solcher stabilisierender Spannseile ist das Seiltragwerks des Daches der Messehalle 26 in Hannover von Herzog & Partner. (Bild 3.21).

Es ist zu beachten, dass einseitige veränderliche Lasten, welche grösser sind als die Summe der vertikalen Komponenten der Spannkräfte in den stabilisierenden Seilen, zu einem Entspannen dieser Seile führen, so dass die Stabilisierung inaktiv wird. Diese Überlegung liefert ein Kriterium für die Festlegung der Spannkräfte in den stabilisierenden Seilen.

Versteifungsträger

Eine weitere Möglichkeit zur Reduzierung der Formänderungen infolge einseitiger veränderlicher Lasten besteht in der Anordnung eines *Versteifungsträgers* welcher mit Verbindungsseilen an das *Tragseil* angehängt

und an seinen beiden Enden an einem *zusätzlichen Auflager* befestigt ist. Der Träger setzt sich, dank seiner so genannten Biegesteifigkeit (vgl. Kapitel 12), den Formänderungen des Tragseiles entgegen und hilft ähnlich wie beim Tragseil mit stabilisierenden Spannseilen, die einseitigen veränderlichen Lasten so auf das Tragseil umzuverteilen, dass die gesamte auf das Tragseil wirkenden Kräfte wiederum quasi gleichmässig verteilt sind.

Das im Bild 3.22 dargestellte Beispiel zeigt ein solches Tragwerk unter einer konzentrierten Einzellast in Feldmitte. Ohne Versteifungsträger hätte das Seil die Tendenz, die Form eines Dreieckes mit einer beträchtlichen Formänderung in Feldmitte anzunehmen. Der Träger bewirkt jedoch eine Verteilung der konzentrierten Last auf mehrere Verbindungsseile. Im Allgemeinen bewirken die angreifenden Kräfte eine leichte Verbiegung des Versteifungsträger, was in einer geringen Formänderung des Tragseiles resultieren kann. Diese Lösung zur Stabilisierung kommt häufig bei Hängebrücken zur Anwendung. Dabei wirkt die Fahrbahnplatte welche den Strassen- oder Bahnverkehr trägt als Versteifungsträger wie etwa bei der San Francisco-Oakland Bay Bridge (Bild 3.23).

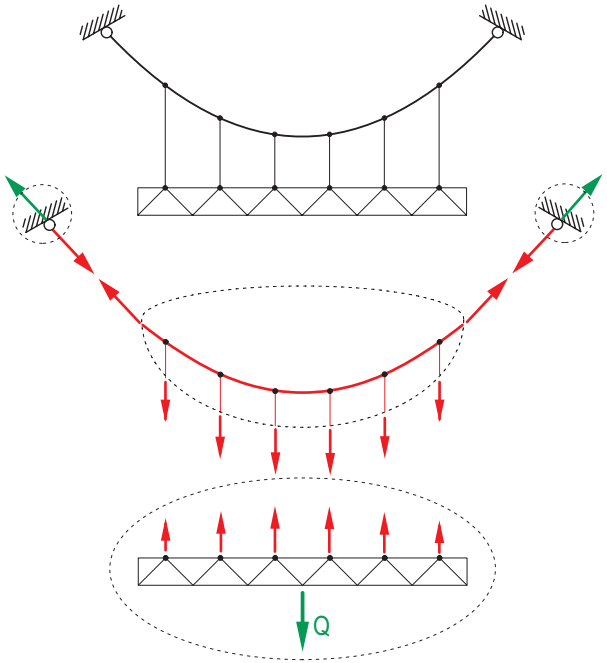


Bild 3.22: innere Kräfte im Versteifungsträger

Auch im Hochbau können solche Tragwerke zur Überspannung grosser Spannweiten eingesetzt werden. Die bereits zuvor erwähnte Dachkonstruktion von Pier Luigi Nervi für die Papierfabrik Burgo ist ein solches Beispiel (vgl. Bild 3.12). Dabei hat das Dach in diesem Fall die Funktion des Versteifungsträgers, während die parabolischen Seile sichtbar geführt sind.

Biegesteife Tragseile

Eine weitere Möglichkeit zur Stabilisierung des Tragseiles besteht in der Vereinigung des Versteifungsträgers mit dem Tragseil. Man redet dann von *biegesteifen Tragseilen* (Bild 3.24). Unter dem Einfluss der ständigen Lasten verhält sich das System wie ein Seil, während sowohl konzentrierte als auch nur über einen Teil der Länge verteilte Lasten auf die gleiche Weise wie im Fall des Versteifungsträgers auf das Tragseil verteilt werden. Dies bedeutet aber, dass bei biegesteifen Tragseilen die Wirkungslinie der Seilkräfte nicht unbedingt mit der Achse des Tragwerks übereinstimmen muss. Beim Tragwerksentwurf kann dies ausgenutzt werden, indem die Achse eines biegesteifen Seiles nicht zwingend affin zum Verlauf der inneren Kräfte unter ständigen Lasten gewählt werden muss. Auf diese Art wird es möglich, in gewissen Grenzen auch weiteren Anforderungen an das Lichtraumprofil des Raumes gerecht zu werden.

Ein sehr anschauliches Beispiel für die diese Art der Formgebung ist das Dachtragwerk der Schwimmhalle des Olympiazentrums in Tokyo von Kenzo Tange (Bild 3.25).

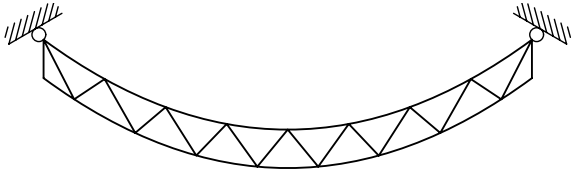


Bild 3.24: biegesteifes Tragseil



Bild 3.23: San Francisco-Oakland Bay Bridge, 1933-36, Arch.: Rudolf Modrzejewski, Ing.: Charles Purcell



Bild 3.25: National Olympic Gymnasium, Tokyo, 1961-64, Kenzo Tange, Ing.: Tsuboi & Kawaguchi

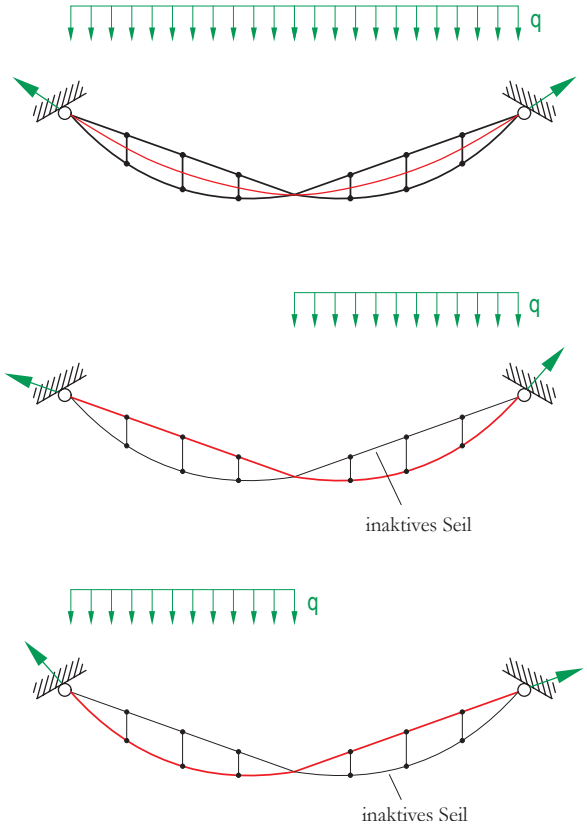


Bild 3.26: Funktionweise von kombinierten Tragseilen

Kombination mehrerer Tragseile

Eine weitere Möglichkeit, die Formänderungen des Tragseiles unter einseitigen veränderlichen Nutzlasten zu beschränken, besteht in der *Kombination mehrerer Tragseile* mit dem Ziel, dass unabhängig von der Lage der Last immer ein Seil in der Lage ist, die Last vollständig aufzunehmen. Wenn vor allem Nutzlasten auf der einen oder auf der anderen Hälfte der Spannweite aufgenommen werden sollen, kann die Aufgabe elegant mit zwei Seilen gelöst werden (Bild 3.26). Falls die Achse des aus den beiden Seilen bestehenden Tragwerks die Form einer Parabel annimmt, so sind unter gleichmässig verteilten ständigen Lasten beide Seile gleich stark belastet, so dass die Resultierenden der inneren Seilkräfte in der Tragwerksachse verlaufen.

Dieses System kam bei den seitlichen Feldern der Tower Bridge in London zur Anwendung (Bild 3.27 & 3.28). Die Seile sind zusätzlich mit Diagonalstäben verbunden. Dadurch entstehen biegesteife Seilsegmente welche in der Lage sind, beliebige Anordnungen von veränderlichen Lasten, wie oben beschrieben, aufzunehmen.

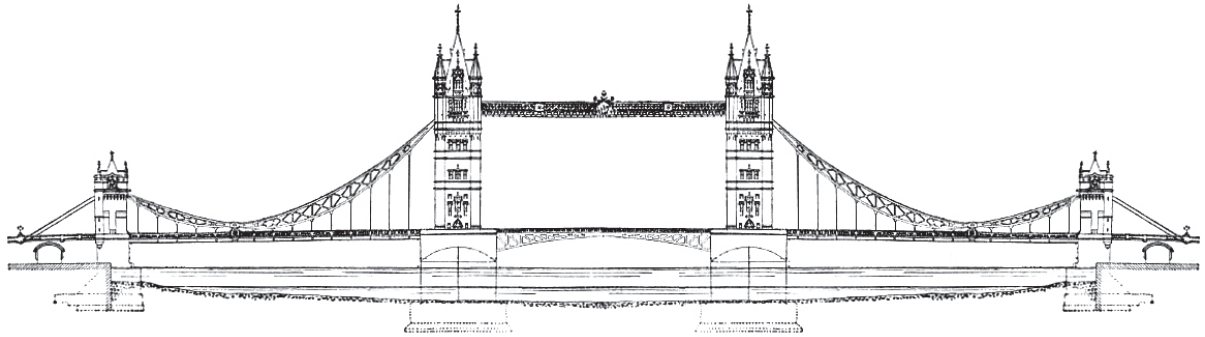


Bild 3.27: Tower Bridge, London, 1894, Arch.: Sir Horace Jones, Ing.: Sir John Wolfe-Barry



Bild 3.28: Randfeld der Tower Bridge

4 Räumliche Seiltragwerke

Bei den im Kapitel 3 behandelten Seiltragwerken befindet sich das tragende Seil und das zugehörige Versteifungssystem immer in einer gemeinsamen vertikalen Ebene. Es ist jedoch auch möglich, ein Tragseil mit Hilfe eines Seilsystems zu versteifen, *welches die Tragseilebene lediglich schneidet*. Auf diese Art erhält man auch bei kleinen Spannkräften ein extrem steifes Tragwerk.

Die prinzipielle Funktionsweise eines solchen räumlichen Seiltragwerks ist schematisch in Bild 4.1 dargestellt. Durch Bildung von Subsystemen werden die auf das Tragwerk wirkenden Kräfte ersichtlich: Die im Grundriss quer zur Tragseilebene verlaufenden Vorspannseile weisen Zugkräfte auf, welche im Gleichgewicht sind mit den Umlenkkräften des Tragseiles. Ein so stabilisiertes Seil ist nicht nur extrem steif, sondern weist noch einen anderen Vorteil auf: Durch die räumliche Ausdehnung des Seilsystems ist das Tragwerk in der Lage, Lasten aufzunehmen welche nicht in der Ebene des Tragseiles wirken, wie zum Beispiel Windlasten.

4.1 Seilnetze

Um ein Dach zu tragen bedarf es mehrerer Tragseile. Diese können im Grundriss parallel sein, wie bei einigen in Kapitel 3 betrachteten Beispielen, oder aber im Grundriss beliebige Richtungen aufweisen. Die Spannseile können dabei mehrere Tragseile schneiden und diese dadurch stabilisieren. Auf diese Art erhält man ein Seilnetz, bei welchem die Tragseile eine nach oben gerichtete Krümmung aufweisen (Bild 4.1a) und die Spannseile mit ihrer entgegengesetzt gerichteten Krümmung die Tragseile nach unten ziehen (Bild 4.1b).

Die statische Wirkungsweise von räumlichen Seiltragwerken ist somit vergleichbar mit den in Abschnitt 3.9 besprochenen Seilbalken: die nach unten gerichteten, von den Spannseilen ausgeübten Zugkräfte und die ständigen Lasten werden von den Tragseilen aufgenommen. Die veränderlichen Lasten bewirken im Bereich wo sie angreifen eine Zunahme der Kräfte in den Tragseilen und umgekehrt eine entsprechende Abnahme der Kräfte in den Spannseilen.

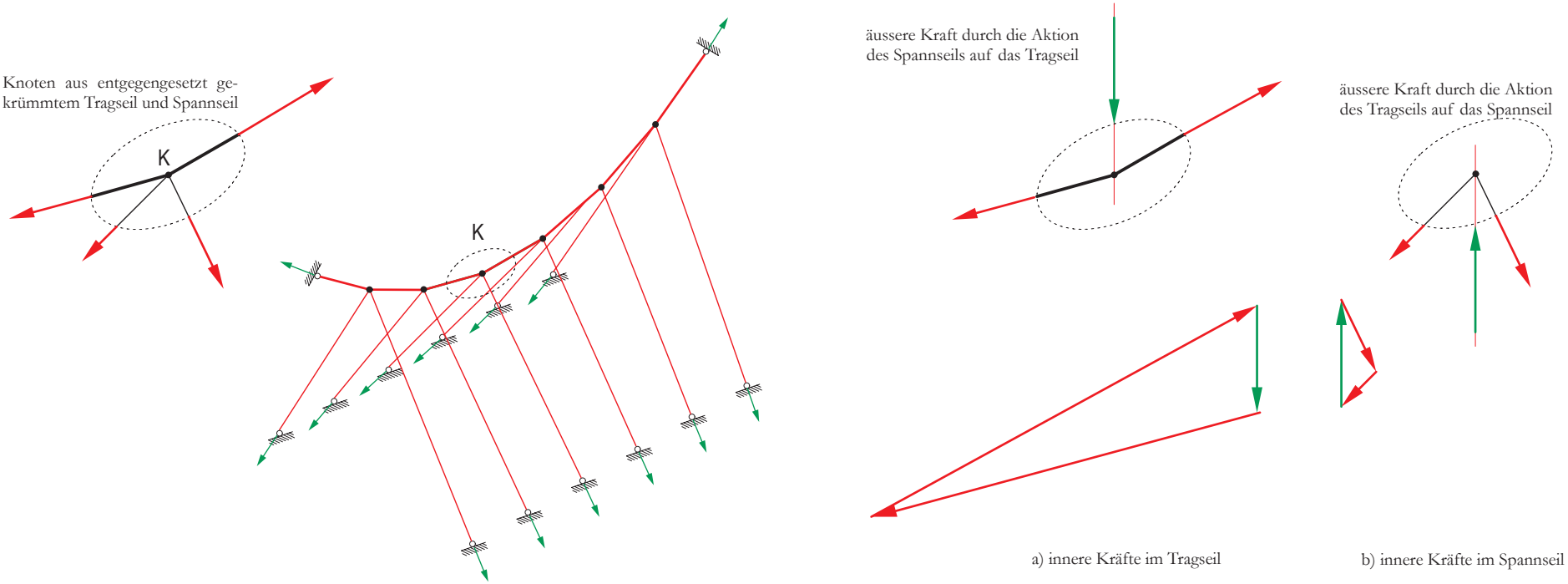
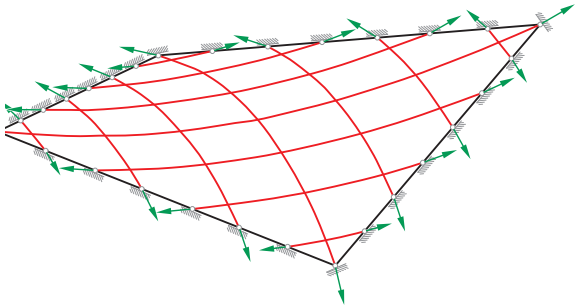
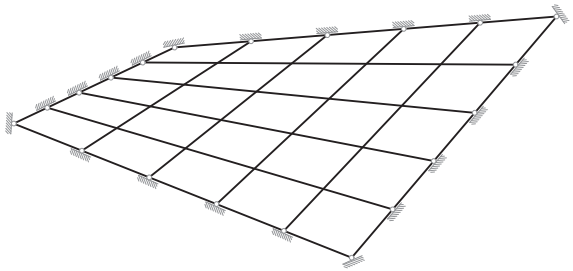


Bild 4.1: räumliches Seiltragwerk und innere Kräfte in Tragseil (a) und Spannseil (b)



a) Seilnetz entlang der Hauptkrümmungsrichtungen



b) erzeugende Geraden

Bild 4.2: hyperbolisches Paraboloid

Im Allgemeinen beschreiben Seilnetze räumliche Flächen. Diejenige räumliche Fläche, welche sich aus statischer Sicht ähnlich wie die ebene Parabel verhält, ist das *hyperbolische Paraboloid*. Auch mathematisch sind beide miteinander vergleichbar: die Parabel ist eine Kurve zweiter Ordnung, das hyperbolische Paraboloid ist eine Fläche zweiter Ordnung. Dies bedeutet, das jeder ebene Schnitt durch das hyperbolische Paraboloid eine allgemeine Kurve zweiter Ordnung darstellt, also eine Parabel oder eine Hyperbel. Da beide Seilformen das Resultat einer gleichmässig verteilten Last sind (vgl. Kapitel 3), folgt aus der Schnitteigenschaft des hyperbolischen Paraboloids, dass die Umlenkkräfte in den Seilen gleichmässig über die Seillänge verteilt sind.

Hyperbolische Paraboloide sind Beispiele für so genannte *Regelflächen*, eine Klasse von Flächen mit speziellen geometrischen Eigenschaften. Bei allen Flächen dieser Familie ist es möglich eine Schar ebener Schnitte durch die Fläche so zu setzen, dass die sich daraus ergebende Familie von Schnittkurven eine Schar von Geraden ist, also Parabeln mit unendlich grosser Brennweite. Diese Schar von Schnittgeraden wird auch als *Erzeugende der Fläche* bezeichnet.

Bei hyperbolischen Paraboloiden existieren sogar zwei senkrecht aufeinander stehende Familien von Erzeugenden (Bild 4.2b). Werden die beiden Seilscharen der Tragseile und Spannseile entlang dieser Geraden angeordnet, so entspricht die generierte räumliche Fläche nach wie vor einem hyperbolischen Paraboloid. Die Krümmung der einzelnen Seile ist jedoch null und daher können die Tragseile wegen ihrer unendlich grossen Schlankheit ohne grosse Formänderungen keine Lasten aufnehmen. Auch die stabilisierende Wirkung der Spannseile ist nicht mehr möglich.

Wird daher eine Fläche durch ein räumliches Seiltragwerk beschrieben, so müssen die Richtungen der Tragseile und der Spannseile so festgelegt werden, dass ihre *Krümmungen nicht null* sind. Aus statischer Sicht ist das Tragwerk am effizientesten, wenn die nach oben gerichtete Krümmung der Tragseile und die nach unten gerichtete Krümmung der Spannseile maximal sind. Diese optimalen Richtungen sind die so genannten *Hauptkrümmungsrichtungen* der Fläche und sie sind in jedem Punkt stets rechtwinklig zueinander gerichtet.

Wie zuvor beschrieben besitzt das hyperbolische Paraboloid die Besonderheit, dass die parabelförmigen Kurven in den Vertikalschnitten gleichmässig verteilte Umlenkkräfte aufweisen. Veränderungen in der Verteilung dieser Kräfte führen zu Formänderungen und damit zu andersartigen Flächen. Unter der Bedingung, dass eine der beiden Hauptkrümmungen nach oben und eine nach unten gerichtet ist, können diese Flächen wie abgespannte Seilnetze wirken. Das Dach des olympischen Stadions in München ist ein eindrückliches Beispiel für die formalen Freiheiten, welche diese Art von Tragwerke zulassen (Bild 4.3).

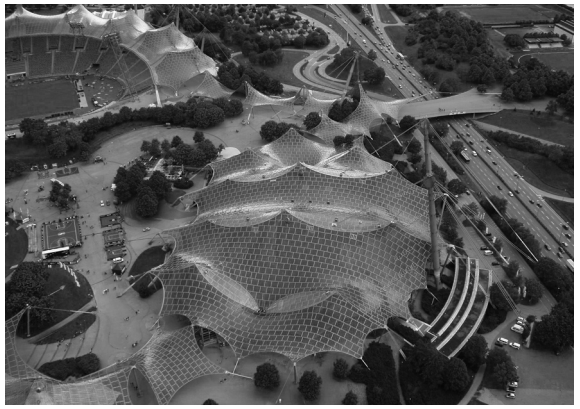




Bild 4.3: Olympiapark, München, 1968-72, Arch.: Günter Behnisch & Frei Otto, Ing.: Jörg Schlaich

Die abgespannten Seilnetze können in massiven Tragelementen verankert sein, wie beim Beispiel des Stadions in Saint-Ouen (Bild 4.4). Sie können aber auch ein Randseilsystem belasten, wie beispielsweise beim Dach des Münchner Olympia-Stadions. Hier geben die Randseile, welche durch die Trag- und Spannseile beansprucht sind, ihre Zugkräfte direkt auf die konzentrierten Auflagerpunkte ab, welche ihrerseits aus Fundamenten und aus Pylonen bestehen.

4.2 Zelte und Membranen

Wenn man in Gedanken die Abstände zwischen den Seilen immer kleiner werden lässt, dann gehen die Seilnetze in aus Stoff bestehende *Zelte* über. Diese Tragwerke sind aus sehr frühen Zeiten bekannt: mit Hilfe von Tierfellen oder Stoffen, welche auf Holzästen gespannt und am Boden befestigt waren, hat der Mensch gelernt, sehr effiziente Tragwerke zu bauen (Bild 4.5).

Mit Ausnahme von Tragwerken, welche eine häufige und schnelle Montage und Demontage voraussetzen, wie zum Beispiel Zirkuszelte oder Campingzelte, hat diese Tragwerksart bis in die 1960er Jahre kein grosses Interesse bei Architekten geweckt. Mit der Einführung von synthetischen Materialien, insbesondere mit PVC beschichtetem Polyester und mit Glasfasern verstärktem Teflon, beides sowohl beanspruchungs- als auch witterungsresistent, haben die *Membranen* interessante neue Anwendungen gefunden.

Das von Skidmore, Owings & Merrill (SOM) entworfene Haj-Terminal in Jeddah ist sicherlich eines der spektakulärsten Beispiele (Bild 4.6). Bemerkenswert an diesem Tragwerk ist nicht nur die überdeckte Fläche von 425'000 m^2, sondern vor allem die sehr kurze Montagezeit von lediglich 3 Monaten

Gemeinsam ist all diesen Tragwerken, dass sie sehr kleine Eigenlasten aufweisen. Als Hauptkräfte für die Formgebung wirken somit die veränderlichen Lasten und die Spannkräfte. Das statische Verhalten von Membranen ist identisch mit demjenigen der Seilnetze. Beim Seil wurde die innere Kraft Z in [kN] oder in [N] definiert. Bei den Membranen werden dagegen die inneren Kräfte z pro Längeneinheit mit den Einheiten [kN/m] oder [N/mm] angegeben.

Die Untersuchung eines Teilstückes der Membran als Subsystem verdeutlicht, dass das Teilstück zwei in unterschiedliche Richtungen wirkenden inneren Kräften ausgesetzt ist (Bild 4.7). Dies bestätigt das zu den Seilnetzen analoge Tragverhalten, sind doch die Seilnetze aus einer Schar von Tragseilen und einer diese kreuzende Schar von Spannseilen zusammengesetzt.

Im Gegensatz zu den Seilnetzen haben bei den Membranen die inneren Kräfte keine vorgegebenen Richtungen. Wie bei den Seilnetzen erhält man aber auch bei den Membranen das effizienteste Tragverhalten, wenn die inneren Kräfte in den Hauptkrümmungsrichtungen wirken. Diese inneren Kräfte werden entweder in steife, als Auflager wirkende Randelemente eingeleitet oder sie können durch gespannte Randseile aufgenommen werden, welche wie bei den Seilnetzen an ihren Enden an punktförmigen Auflagern befestigt sind.



Bild 4.4: Sporthalle, Saint Ouen, 1968-71, Arch.: Anatole Kopp, Ing.: René Sarger



Bild 4.5 traditionelles Nomadenzelt in Tibet

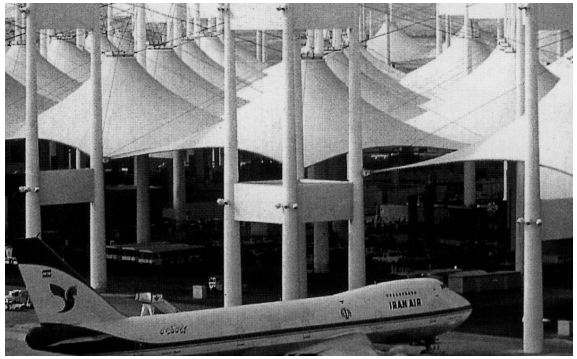


Bild4.6:Haj-Terminal,König-Abdul-Aziz-Flughafen,Jeddah,1978-81, Arch.: SOM, Ing.: Schlaich Bergermann & Partner

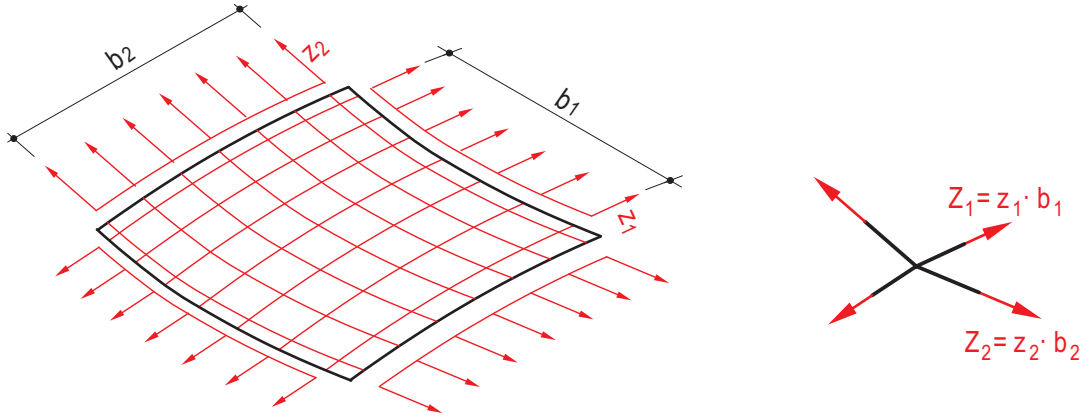


Bild 4.7: Tragwirkung einer Membran mit gegenläufigen Hauptkrümmungen

Beim Entwurf eines Zeltes ist genau wie beim Entwurf eines Seilnetzes darauf zu achten, dass in jedem Punkt die beiden Hauptkrümmungen in entgegengesetzter Richtung angeordnet sind. Zusätzlich müssen die für die Formstabilisierung notwendigen Spannkräfte möglichst genau in Richtung der Hauptkrümmungen eingeleitet werden.

4.3 Begehbare pneumatische Membranen

Im Gegensatz zu den Zelten, wo die Lasten durch das tragende Seilsystem aufgenommen werden und die Stabilisierung durch ein Spannsystem sichergestellt wird, werden bei den *pneumatischen Tragwerken* die Lasten durch einen *inneren Luftdruck* aufgenommen. Auch in diesem Fall ist die Membran in zwei Richtungen gespannt. Die Membran weist jedoch in beide Richtungen eine nach unten gerichtete Krümmung auf (Bild 4.10). Der Innendruck bewirkt dabei eine Vorspannung durch welche in den beiden Hauptkrümmungsrichtungen der Membran Zugkräfte entstehen.

Das Tragverhalten von pneumatischen Systemen wird leichter verständlich, wenn die Membran durch ein Seilsystem idealisiert wird (Bild 4.10). Die nach oben wirkende Kraft des Innendruckes kann dann im Überschneidungspunkt von zwei Seilen konzentriert werden. Die Eigenlasten und Nutzlasten wirken dieser nach oben gerichteten Kraft des Innendrucks entgegen. Aus dieser Modellierung folgt, dass die Tragfähigkeit des Tragwerks bei einer Laststeigerung dann erschöpft ist, wenn die nach unten wirkenden äusseren Lasten gleich gross geworden sind wie die nach oben gerichteten vertikalen Komponenten der Innendruckkräfte.

Eines der ersten Tragwerke dieser Art wurde kurz nach dem zweiten Weltkrieg zum Schutz von Radaranlagen vom Ingenieur Walter Bird gebaut (Bild 4.8). Auch in diesem Fall wurde die Entwicklung erst möglich durch die Einführung von genügend festen Materialien. Da diese Art von Tragwerke in der Regel nicht gegen steife Fassaden angrenzen, spielen die Formänderungen praktisch keine Rolle, so dass weichere Materialien gewählt werden können. Häufig kommen daher Nylonfasern mit einer Neoprenbeschichtung zur Anwendung.

Da das Tragverhalten vom Innendruck abhängt, ist die Aufrechterhaltung dieses Druckes zwingend. Wegen der grossen Abmessungen solcher pneumatischen Tragwerke und aufgrund der notwendigen Öffnungen für die Erschliessung können sie nicht vollständig dicht ausgebildet werden, so dass ständig Luft in den Innenraum gepumpt werden muss. Es handelt sich also um Tragwerke, welche nur dank einer ständigen Energiezufuhr funktionieren können.

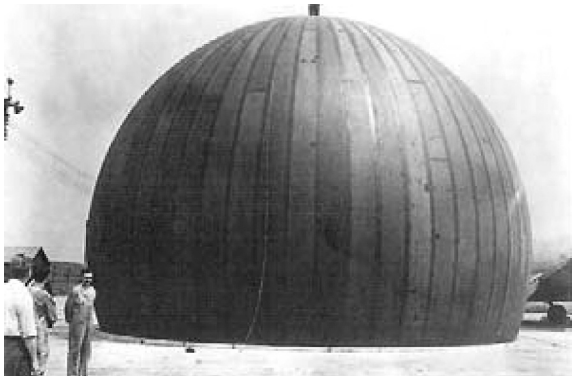


Bild 4.8: Radome-Prototyp, 1948, Arch. & Ing.: Walter Bird

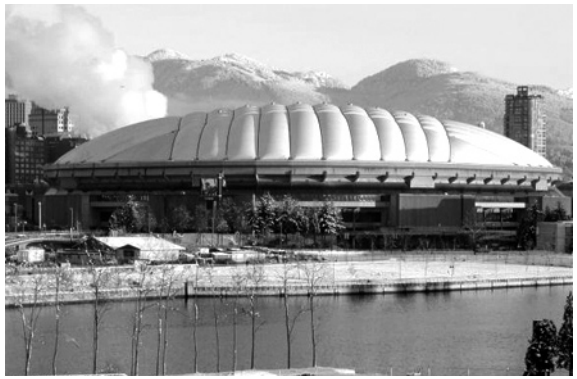


Bild 4.9: BC Place Stadium, Vancouver, 1982-83, Arch.: Studio Philips Barrett, Ing.: Geiger-Berger

Bauwerke mit pneumatischen Membranen weisen häufig ein kleines Schlankheitsverhältnis *l/f* auf. Um dieses Verhältnis zu erhöhen, ist es notwendig, die pneumatische Membran ähnlich wie beim biegesteifen Seil mit einer Serie von Hohlräumen zu verstärken. Die Art der Tragwirkung wird dadurch nicht verändert. Die umgebenden Schichten werden jedoch durch die Luftschicht vorgespannt und ziehen die Membran daher gegen den inneren Luftdruck nach unten. Auf diese Art können grosse Spannweiten überbrückt werden wie das Beispiel des für 60'000 Besucher Platz bietende BC Place Stadiums in Vancouver verdeutlicht. (Bild 4.9).

4.4 Geschlossene pneumatische Membranen mit hohem Druck

Geschlossene pneumatische Membranen haben eine grundlegend andersartige Tragwirkung wie begehbare pneumatische Membranen. Um diese Tragwerke intuitiv zu verstehen stelle man sich aufblasbare Rettungsringe oder Luftmatratzen vor. Mit der Behandlung der Balken in Kapitel 12, an welche sich ihre statische Wirkungsweise anlehnt, werden diese Tragwerke verständlich. Bild 4.11 zeigt eine seltene Tragwerksanwendung.

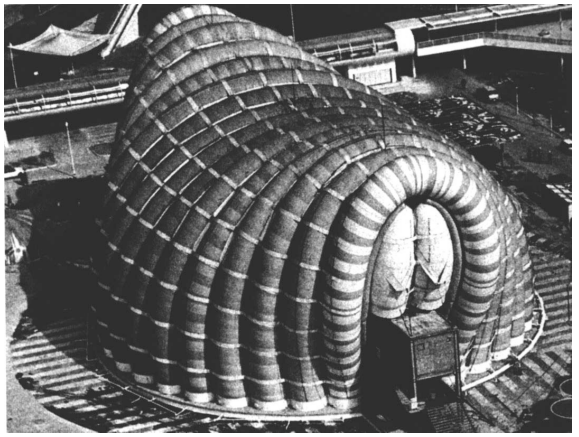


Bild 4.11: Fuji Expo-Pavillion, Osaka, 1970, Arch.: Yakata Murata
Ing.: Mamuro Kawaguchi

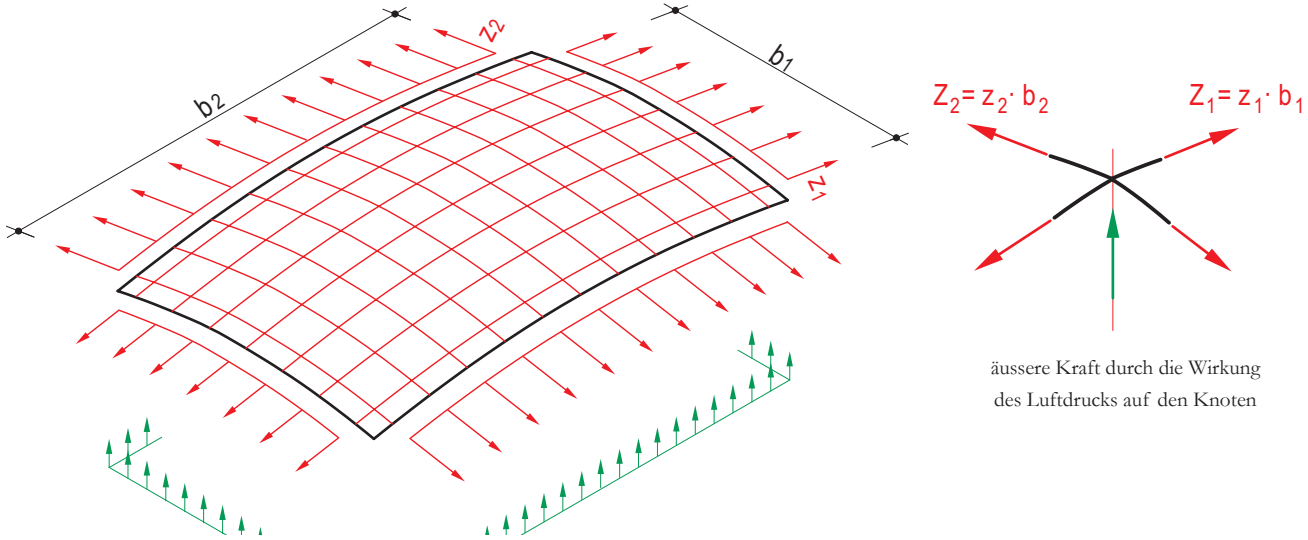


Bild 4.10: Tragwirkung einer pneumatischen Membran

5 Materialverhalten und Bemessung

5.1 Innere Kräfte und Verformungen im Tragelement

Wenn eine Spiralfeder gezogen wird, verlängert sie sich. Dasselbe gilt auch für Baumaterialien. So *verlängert* sich zum Beispiel auch ein Holzstab oder ein Stahlstab wenn an beiden Enden eine *Zugkraft* angebracht wird (Bild 5.1a). Greift dagegen eine *Druckkraft* an einer Betonstütze an, so *verkürzt* sich diese (Bild 5.1b). Obwohl die entsprechenden Verformungen in der Regel klein sind, kann ihre Untersuchung notwendig werden.

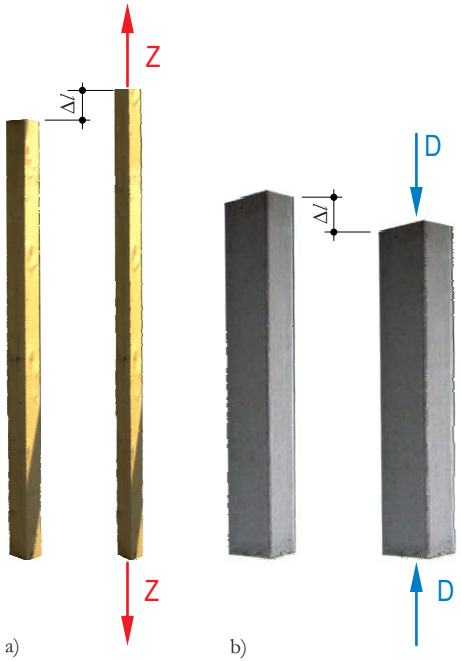


Bild 5.1: Längenänderung bei Zug (a) und Druck (b)

Zuerst sollen die wichtigsten Einfussfaktoren auf die Verformungen beschrieben werden.

1. Die angreifenden äusseren Kräfte haben einen grossen Einfluss: Je grösser ihre Intensität, umso grösser wird die Verformung sein.
2. Die Art des Materials hat ebenfalls einen wesentlichen Einfluss: So hat ein Seil aus Stahl eine viel kleinere Verformung unter der gleichen Zugkraft wie beispielsweise ein Seil aus Gummi mit gleichem Querschnitt.
3. Im Weiteren beeinflussen die Abmessungen des Tragelementes (Querschnittsfläche und Länge) die Verformung.

Um diese Einflüsse quantifizieren zu können, wird ein Experiment durchgeführt. Eine Feder wird belastet, indem ein Gewicht Q daran gehängt wird. Die Verlängerung Δl der Feder wird dabei gemessen (Bild 5.2a).

Wenn das Gewicht Q und damit die innere Kraft Z vergrössert werden, nimmt auch die Verlängerung Δl zu. Wenn die Kraft zum Beispiel verdoppelt wird, verdoppelt sich auch die Verlängerung. Das bedeutet, dass beim Auftragen der Werte in ein Diagramm eine gerade Linie resultiert (Bild 5.2b). Mit anderen Worten zeigt die Feder ein *lineares Verhalten*. Wie weiter unten gezeigt wird, gilt das nicht unbedingt für alle Materialien und auch nicht für alle inneren Kräfte.

Wenn nun das an der Feder hängende Gewicht angehoben wird, wird die innere Kraft in der Feder reduziert. Entfernt man das Gewicht vollständig, so ist die innere Kraft wiederum null und die Feder verkürzt sich auf ihre ursprüngliche Länge. Im Diagramm (Bild 5.2b) bedeutet das, dass dieser Zustand der inneren Kraft und der zugehörigen Verformung im Ursprung des Diagrammes abgebildet sind. Die Feder zeigt somit ein vollständig reversibles Verhalten. Dieses wird als *elastisches Verhalten* bezeichnet.

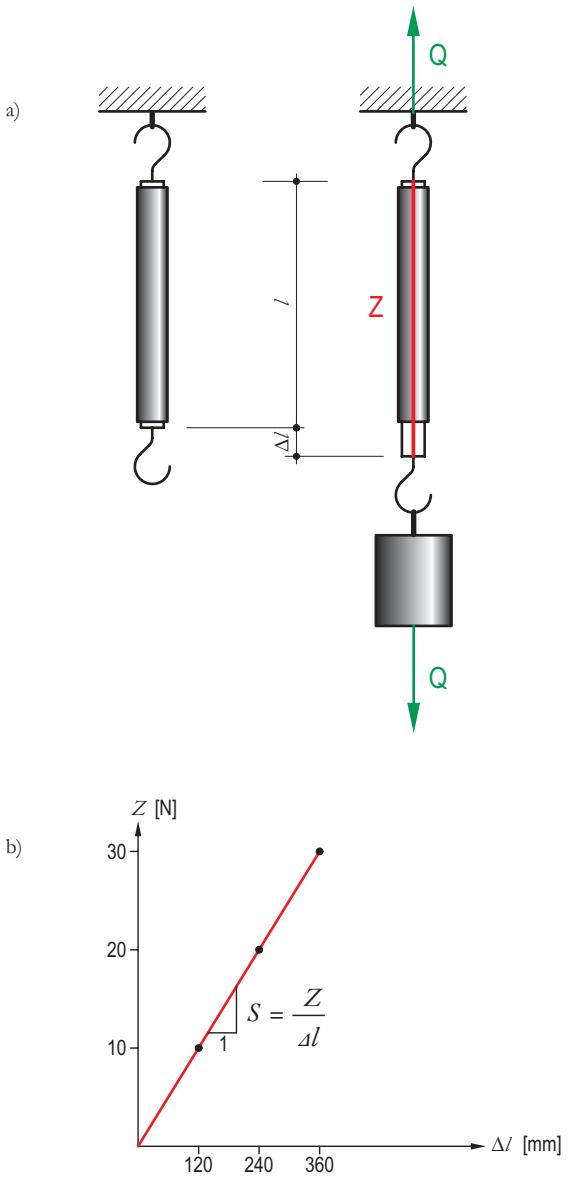


Bild 5.2: Tragverhalten einer Feder

5.2 Steifigkeit eines Tragelementes

Wenn das Verhalten elastisch und reversibel ist, reicht ein einziger Parameter aus, um das Verhalten eines Tragelementes quantitativ zu definieren. Diese Grösse, welche die Neigung der Geraden im Diagramm $Z(\Delta l)$ darstellt, wird als *Steifigkeit* $S = Z/\Delta l$ bezeichnet (Bild 5.2). Im Weiteren wird untersucht, welche Hauptparameter die Steifigkeit eines Tragelementes beeinflussen.

Die Länge der Feder kann einfach verdoppelt werden, indem eine zweite Feder mit den gleichen Eigenschaften an die erste angehängt wird. Mit der Hilfe von Subsystemen wird ersichtlich, dass beide Federn die gleiche innere Kraft aufweisen wie die untersuchte einzelne Feder. Die Verlängerung Δl summiert sich dagegen, so dass die doppelte Verformung und somit die halbierte Steifigkeit resultiert wie im Falle der einzelnen Feder (Bild 5.3a). Verallgemeinernd heisst das, dass die *Steifigkeit umgekehrt proportional zur Länge* ist. Es ist zu bemerken, dass unter konstanter Kraft die spezifische Verformung $\Delta l/l$ des Tragelementes konstant bleibt, wie im Abschnitt 5.4 detailliert gezeigt wird.

In einem weiteren Experiment werden die beiden Federn parallel angeordnet. Auf diese Art wird die Querschnittsfläche der Feder verdoppelt. Jede der beiden Federn weist dann die Hälfte der Kraft Z auf, so dass die Verlängerung Δl im Vergleich zum Fall mit einer Feder halbiert wird (Bild 5.3b). Die Steifigkeit ist also verdoppelt worden. Das bedeutet, dass die *Steifigkeit direkt proportional zur Querschnittsfläche A* ist.

Die als Verhältnis der Beanspruchung Z zur Verlängerung Δl definierte Steifigkeit eines Tragelementes ist somit direkt proportional zur Querschnittsfläche A und umgekehrt proportional zur Länge l. Das entsprechende Gesetz lautet:

$$\frac{Z}{\Delta l} = c \cdot \frac{A}{l}$$

mit c als Proportionalitätskonstante. Da, wie weiter oben beschrieben, die Verformung eines Tragelementes und somit auch die Steifigkeit abhängig vom Material sind, wird als Proportionalitätskonstante der so genannte Elastizitätsmodul E eingeführt. Somit ist die *Steifigkeit direkt proportional zum Elastizitätsmodul E.* Aus der Formel ist ersichtlich, dass dieser die Einheit [N/mm²] hat.

$$S = \frac{Z}{\Delta l} = E \cdot \frac{A}{l}$$

Dieser Ausdruck gilt sinngemäss auch für auf Druck beanspruchte Tragelemente. In diesem Fall sind die Verkürzung Δl und damit auch die Druckkraft D negativ.

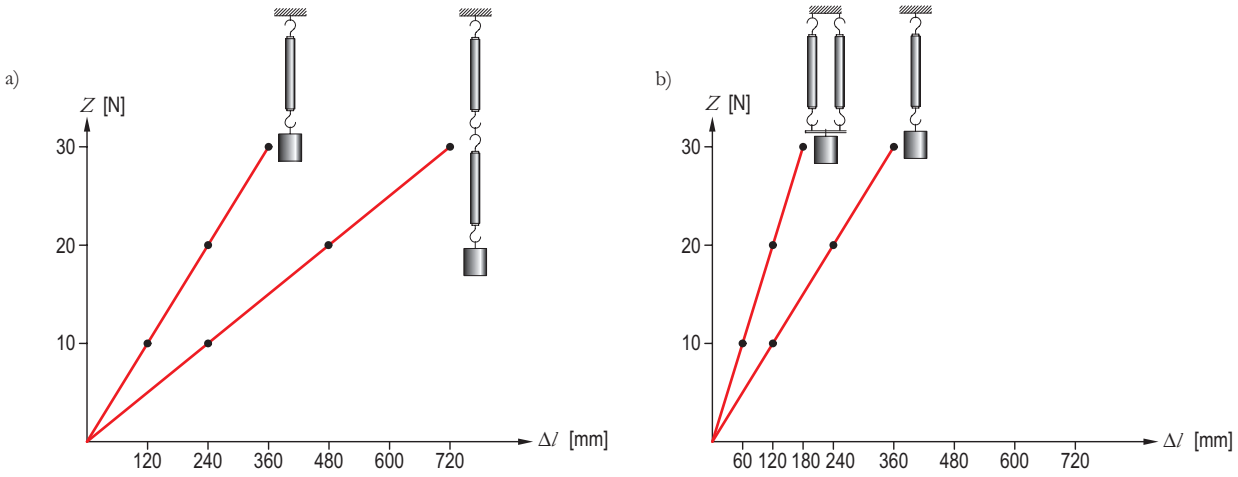


Bild 5.3: Einfluss der Länge und der Querschnittsfläche auf die Steifigkeit der Feder

5.3 Innere Kräfte im Material

Von den beiden im Bild 5.4 dargestellten Stützen hat die rechte einen doppelt so grossen Querschnitt wie die linke. Wenn die Eigenlasten der Stützen zunächst einmal vernachlässigt und beide Stützen mit der gleichen äusseren Kraft Q belastet werden, ist die innere Kraft D unabhängig von der Länge und vom Querschnitt der Stützen. Die Kraft in den beiden Stützen ist also identisch. Es ist aber leicht vorstellbar, dass bei einer progressiven Reduzierung der Querschnittsfläche jede Stütze einen Minimalquerschnitt aufweist, bei dessen Unterschreiten ein Materialversagen erzeugt wird. Somit beeinflusst der Stützenquerschnitt den Grad der Materialbeanspruchung.

Wenn die rechte Stütze vertikal in zwei gleich grosse Teile gespalten wird, so weisen diese beiden Teile eine halb so große innere Kraft auf wie die linke Stütze. Die innere Kraft im Tragelement Stütze ist also nur von der Intensität der inneren Druckkraft abhängig.

Im Gegensatz dazu ist die innere Kraft D im Material immer auch zusätzlich auf die Querschnittsfläche A

bezogen. Deshalb wird eine *auf die Querschnittsfläche bezogene Kraft* definiert:

$$\sigma = \frac{D}{A} \quad \text{gemessen in } [\text{N/mm}^2]$$

Die bezogene innere Kraft ist somit in der linken Stütze zweimal so gross wie in der rechten Stütze, weil die rechte einen doppelt so grossen Querschnitt hat als die linke. Diese bezogene innere Kraft wird von den Bauingenieuren als *Spannung* bezeichnet und beschreibt die innere Beanspruchung des Materials. Sie kann als diejenige Kraft interpretiert werden, welche auf einen Querschnittsteil mit der Einheitsfläche $A = 1$ wirkt. Im Fall einer inneren Druckkraft resultiert eine *Druckspannung*.

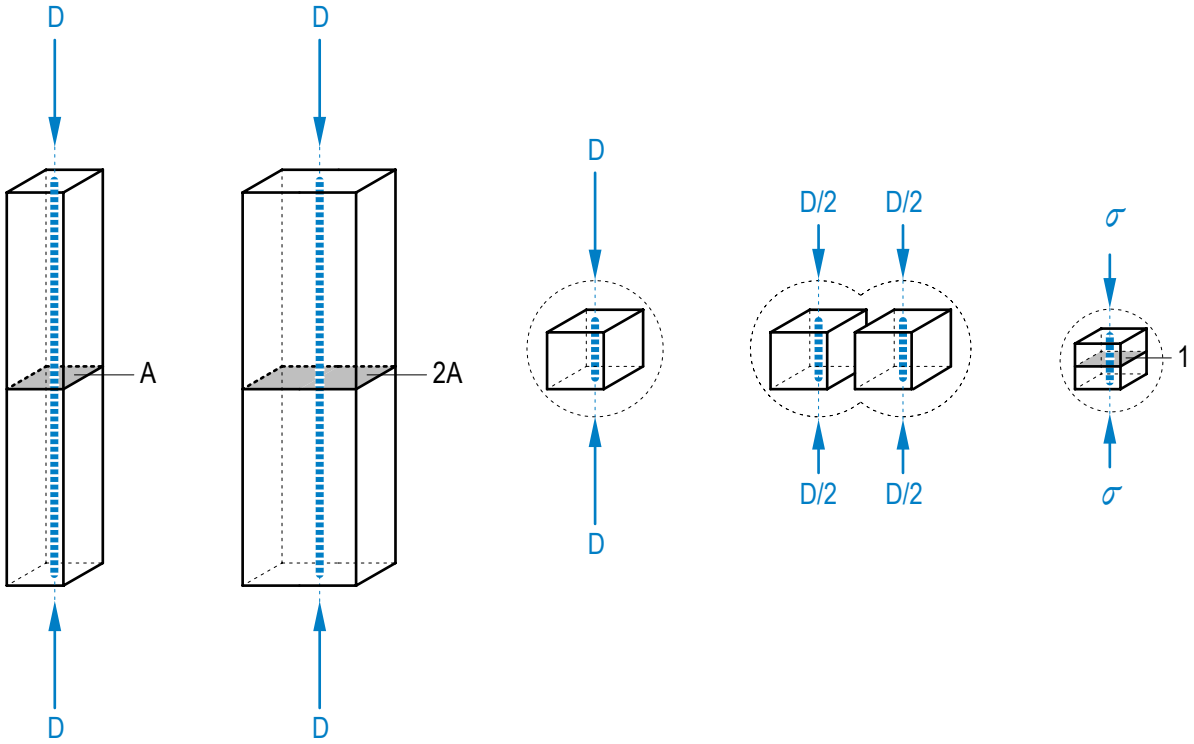


Bild 5.4: Einfluss der Querschnittsfläche auf die bezogene Kraft

Genau wie die Druckkraft wird auch die zugehörige Druckspannung mit einem Minuszeichen versehen.

Wird ein Seil mit einer Zugkraft untersucht, so resultiert im Inneren des Materials eine auf die Querschnittsfläche A bezogene Zugkraft Z, welche als *Zugspannung* bezeichnet wird.

$$\sigma = \frac{Z}{A} \quad \text{gemessen in } [\text{N/mm}^2]$$

Die Zugspannung wird wie die zugehörige Zugkraft mit positivem Vorzeichen angegeben.

5.4 Verformungen und Steifigkeit des Materials

Die Steifigkeit eines auf Zug beanspruchten Tragelementes beträgt nach Abschnitt 5.2

$$S = \frac{Z}{\Delta l} = E \cdot \frac{A}{l}$$

Die zweite Gleichung kann umgeformt werden zu:

$$\frac{Z}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Gemäss Abschnitt 5.3 entspricht Z/A der bezogenen inneren Kraft, d.h. der Spannung σ. Wird nun $\Delta l/l$ als bezogene Verformung ε (Verformung pro Länge) definiert, so resultiert folgendes Gesetz:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \text{oder} \qquad \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$

Diese Beziehung wurde erstmals von Robert Hooke (1635–1703) vorgeschlagen und wird deshalb als *Hookesches Gesetz* bezeichnet. Die zweite Formel beschreibt die Steifigkeit des Materials (Elastizitätsmodul E) als Verhältnis der bezogenen inneren Kraft (Spannung σ), und der bezogenen Verformung (Dehnung ε).

Diese Beziehung, welche sich auf das Material bezieht, ist analog zu derjenigen, mit der die Steifigkeit des Tragelementes definiert wurde. Sie kann ebenfalls in einem so genannten Spannungs-Dehnungs-Diagramm als Gerade dargestellt werden, wobei der Elastizitätsmodul E die Steigung der Geraden beschreibt. Im Bild 5.5 ist das *Spannungs-Dehnungs-Diagramm für das Material* dem *Last-Verformungs-Diagramm für das Tragelement* gemäss Abschnitt 5.1/5.2 gegenübergestellt. Es wird nochmals betont, dass bei der Darstellung des Tragelementes eine Veränderung der Querschnittsfläche oder der Länge das Verhalten und somit die Darstellung beeinflusst. Beim sich auf das Material beziehenden Diagramm haben diese Parameter dagegen keinen Einfluss.

5.5 Durch Temperaturveränderungen bedingte Verformungen

Eine Temperaturveränderung bewirkt ebenfalls eine Verformung des Tragelementes. Bei einer Erwärmung verlängert es sich, und bei einer Abkühlung verkürzt es sich. Die auf die ursprüngliche Länge bezogenen Verformungen, d.h. die Dehnungen, können wie folgt quantifiziert werden:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta T$$

wobei ΔT die Temperaturdifferenz in $°C$ und α_T den Temperaturausdehnungskoeffizient, welcher materialabhängig ist, darstellt. Für Stahl und Beton gilt:

$$\alpha_T = 0.00001\ [°C^{-1}] = 0{,}01\ [‰ / °C]$$

Das bedeutet zum Beispiel, dass bei einer Temperaturveränderung von 100 $°C$ die Länge eines 1 m langen Stabes sich um 1 ‰ seiner ursprünglichen Länge, d.h. um 1 mm verändert. Diese Temperaturverformungen machen beispielsweise bei langen Brücken bewegliche Fahrbahnübergänge erforderlich und sind eine der Begründungen für die Anordnung von Dehnungsfugen (oder auch Dilatationsfugen) in Hochbauten.

5.6 Materialverhalten des Glases

Wenn ein Glasstab auf Zug beansprucht wird, verlängert er sich wie jedes andere Material auch. Diese Verlängerung ist mit dem Auge kaum wahrnehmbar. Wird der Stab wieder entlastet, nimmt er wieder seine ursprüngliche Länge an. Wird der Stab progressiv immer stärker belastet, reisst er plötzlich schlagartig in zwei Stücke (Bild 5.6). Die maximale Spannung, welche beim Erreichen des Bruches im Glasstab vorhanden ist, wird als Zugfestigkeit f_t (tension = Zug) bezeichnet. Auf Druck verhält sich das Glas ähnlich: die maximale Spannung beim Erreichen des Bruches wird als Druckfestigkeit f_c (compression = Druck) bezeichnet. Aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist ersichtlich, dass das Glas ein *linear-elastisches Verhalten* aufweist.

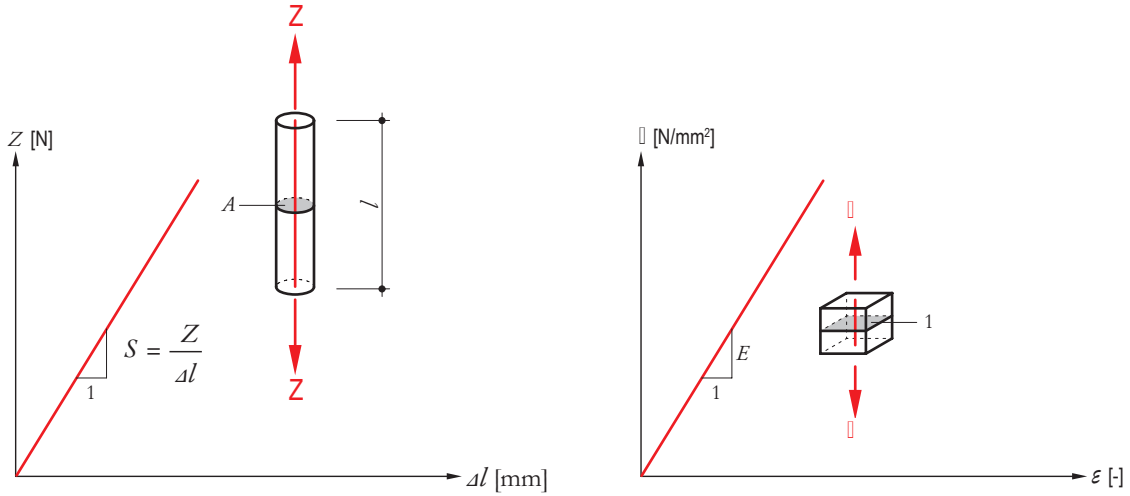


Bild 5.5: Last-Verformungs-Diagramm für das Tragelement gegenüber dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm für das Material

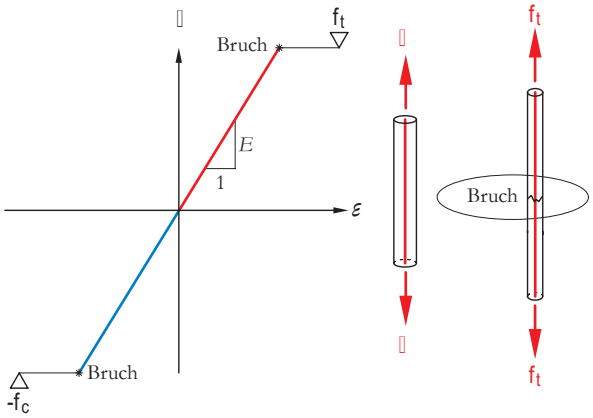


Bild 5.6: Spannungs-Dehnungsverhalten von Glas bis zum Bruch

Da der Glasstab beim Erreichen der Zugfestigkeit f_t schlagartig ohne jegliche Vorankündigung bricht, wird das Verhalten als *spröd* bezeichnet.

Zum Bruch eines Glasstabes auf Zug sind grosse Kräfte erforderlich. Daher kann alternativ ein einfaches Experiment durchgeführt werden, indem der Glasstab (oder auch ein Glasstreifen) auf Biegung beansprucht wird (Bild 5.7). Die Verformungen können dann wesentlich besser visualisiert werden; im Kapitel 12 wird gezeigt, warum das qualitative Verhalten des Biegestabs analog ist zu demjenigen des Zug- oder Druckstabs. Die ausnützbaren mechanischen Eigenschaften von Glas lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. ausnützbare Zugfestigkeit $f_t = 40$ N/mm²
2. Elastizitätsmodul $E = 70'000$ N/mm²
3. Temp.-ausdehungskoeff. $\alpha_T = 0.007$ ‰/ $°C$

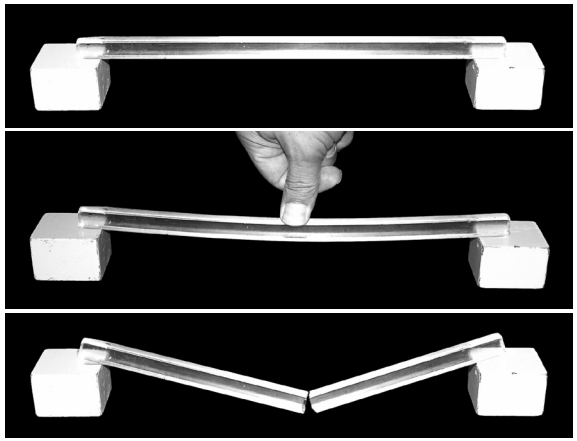


Bild 5.7: Belastung eines Glasstabs bis zum Bruch

5.7 Materialverhalten des Stahls

Wird das analoge Experiment wie im Abschnitt 5.5 für Glas beschrieben mit einem Stahlstab aus konventionellem Baustahl S235 durchgeführt, erhält man in einer ersten Phase qualitativ das gleiche Resultat. Der Stab verformt sich nämlich proportional zur angreifenden äusseren Kraft. Bei einer Entlastung nimmt er dann wie Glas wieder die ursprüngliche Form an (Bild 5.8a).

Wenn dagegen bei der Belastung eine gewisse Grenze überschritten wird, beginnt der Stab sich irreversibel zu verformen, d.h. zu fliessen. Wird er in diesem Zustand wieder entlastet, nähert sich seine Form der ursprünglichen an, ohne sie jedoch wieder zu erreichen (Bild 5.8.b).

Die Spannungs-Dehnungs-Kurve eines auf Zug beanspruchten Stabs (Bild 5.8c), welcher sich qualitativ gleich verhält wie ein Biegestab, unterscheidet sich klar von derjenigen des Glases. Sie weist auch zunächst ein gerades Segment auf, welches die *linear-elastische Phase*

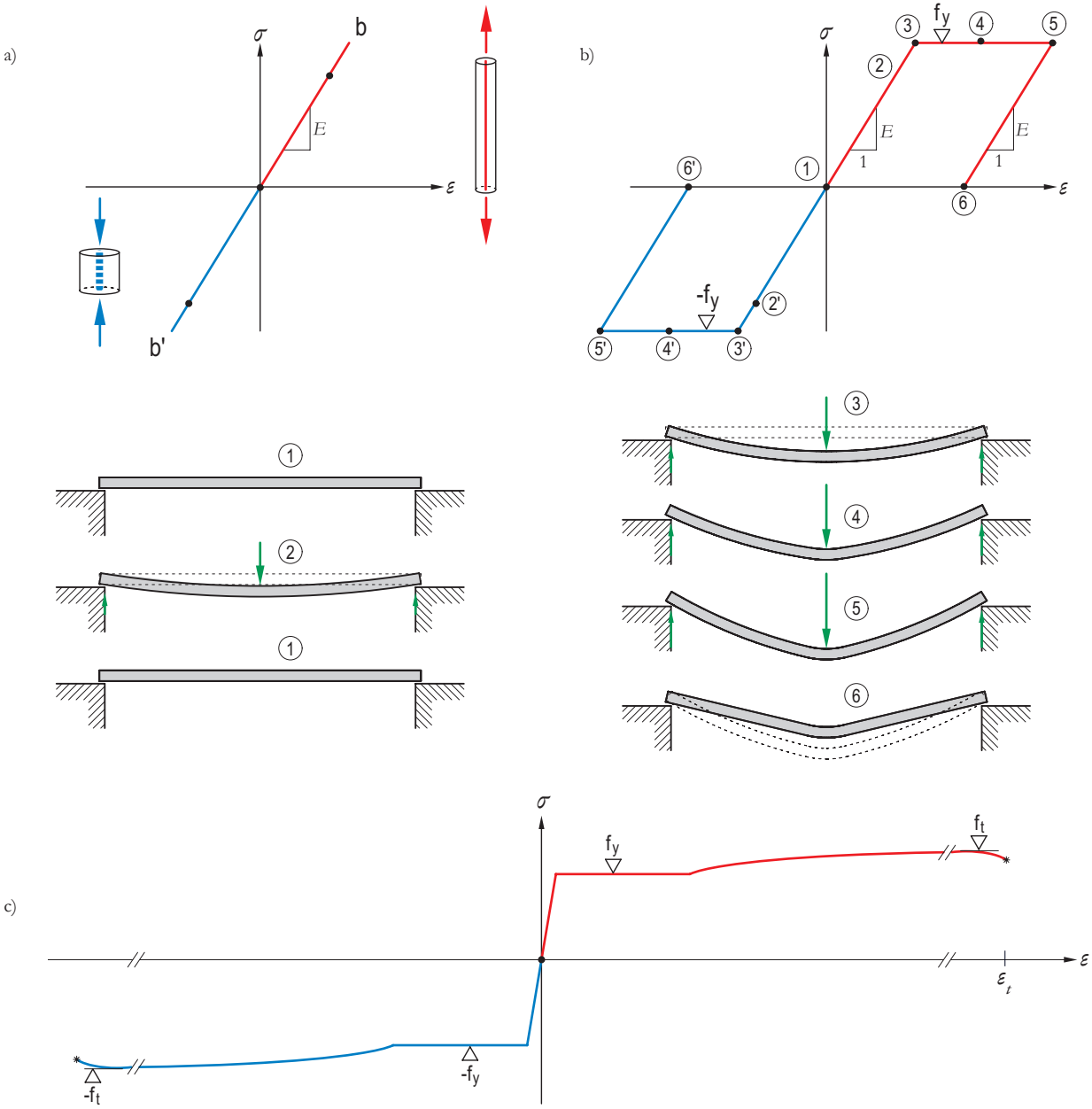


Bild 5.8: Verhalten des Stahls

beschreibt. Die Neigung dieses geraden Segmentes entspricht dem Elastizitätsmodul *E*, welcher für alle Stahlarten einen Wert von 210'000 N/mm² aufweist.

Die anschliessende *plastische Phase* mit den irreversiblen Verformungen ist durch eine konstante äussere Kraft charakterisiert und somit auch durch eine konstante Spannung. Die entsprechende Kraft wird als *Fliesskraft* F_y (to yield = fliessen) und die zugehörige Spannung als *Fliessspannung* oder *Fliessgrenze* f_y bezeichnet. Für unseren untersuchten konventionellen Baustahl beträgt die Fliessspannung 235 N/mm², dieser Wert ist Bestandteil der Stahlbezeichnung S235 (steel = Stahl, Fliessgrenze = *235* N/mm²).

Im Diagramm (Bild 5.8b) wird das Fliessverhalten mit einem horizontalen Liniensegment beschrieben. Weiter ist das Verhalten bei einer Entlastung, nachdem sich der Stab bereits plastisch verformt hat, dargestellt. Es fällt auf, dass die Neigung des entsprechenden Segmentes gleich ist wie diejenige des Anfangssegmentes, was bedeutet, dass der Elastizitätsmodul gleich ist. Der Abstand des Punktes bei völliger Entlastung vom Koordinatenursprung stellt die bleibende, plastische Verformung dar.

Wird der Stab nun neu belastet, zeigt er wieder ein linear-elastisches Verhalten, beschrieben durch dasselbe geneigte lineare Segment wie bei der Entlastung. Nach Erreichen der Fliesskraft treten weitere irreversible, plastische Verformungen auf, beschrieben durch ein weiteres horizontales Segment.

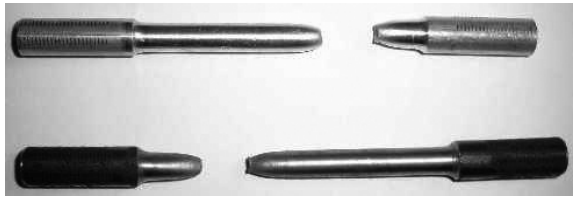


Bild 5.9: Gerissene Stahlzugproben

Wenn der fliessende Stahl noch weiterbelastet wird, ist ab einer bestimmten Verformung (ca. 10‰ = 1 %) wieder eine Zunahme der äusseren Kraft erforderlich (Bild 5.8c). Diese Phase wird *Verfestigungsphase* genannt. Bei sehr grossen Verformungen (> 100 ÷ 200 ‰ = 10 ÷ 20 %!) wird die *Zugfestigkeit* des Materials f_t (tension = Zug) erreicht. Es bildet sich ein Riss, welcher den ganzen Querschnitt durchtrennt so dass der Stab bricht (Bild 5.9).

Das Verhalten des Stahls wird mit einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm beschrieben, welches quantitativ durch *vier Parameter* definiert ist: *Elastizitätsmodul E*, *Fliessspannung* f_y, *Festigkeit* f_t, und *Bruchdehnung* ε_t.

Der Elastizitätsmodul *E* ist wie erwähnt konstant für alle Stahlarten und beträgt *E* = 210'000 N/mm². Die Fliessgrenze (Fliessspannung) f_y ist dagegen von der Stahlart abhängig. Sie variiert zwischen 235 N/mm² bei gewöhnlichem Baustahl und ca. 3000 N/mm² beim sehr hochfesten Stahl für Klaviersaiten. Es ist zu beachten, dass der hochfeste Stahl keine eigentliche plastische Phase besitzt, sondern progressiv von der elastischen in die plastische Phase übergeht. Man behilft sich zur Definition der Fliessgrenze f_y mit einem nominellen Punkt im Spannungs-Dehnungs-Diagramm, bei welchem die bleibende Dehnung 2 mm/m beträgt. Die zugehörige Spannung stellt dann die Fliessgrenze f_y dar.

Zwischen den oben genannten *Stahlarten* gibt es unter anderem hochfesten Stahl, verwendet in Stahlkonstruktionen (f_y = 355 N/mm², S355), Bewehrungsstahl, als Verstärkung im Stahlbeton (f_y = 500 N/mm², S500 bzw. B500) und Spannstahl, verwendet für Kabel und Litzen von gespannten Konstruktionen und für Spannbeton (f_y =1410 bis 1670 N/mm²). Im Bild 5.10 sind die zu diesen ausgewählten Stahlarten zugehörigen Spannungs-Dehnungs-Diagramme dargestellt. Üblicherweise beschränkt sich die Darstellung dieser Diagramme beim Stahl auf den Bereich für das auf Zug beanspruchte Material. Die Bruchdehnung ε_t kann recht große Werte annehmen. Da die zugehörigen sehr grossen Verformungen im Tragelement nicht zugelassen werden können, wird bei der Berechnung als Maximalwert der Spannung die Fliessgrenze angenommen und die Verfestigungsphase vernachlässigt. Dies ist der Grund, warum die Stähle mit ihrer Fliessgrenze f_y bezeichnet werden.

Stahlart	Elastizitätsmodul *E* [N/mm²]	Fliessgrenze f_y [N/mm²]	Festigkeit f_t [N/mm²]	Bruchdehnung ε_t [-]	Temperaturausdehnungskoeffizent α_T [‰/°C]	Raumlast [kN/m³]
S235	210'000	235*	360*	0.210*	0.01	78.5
S355		355*	510*	0.170*		
S500		500*	580*	0.140*		
Stahl für Drähte, Litzen Seile	210'000**	1410 ÷1670*	1570 ÷1860*	0.050*	0.01	78.5

* Mindestwerte
** üblicherweise wird dieser Wert um ca. 10 ÷ 25 % reduziert zur Berücksichtigung des Effektes der Verwindung der Drähte

Tabelle 5.1: Materialkennwerte von Stahl

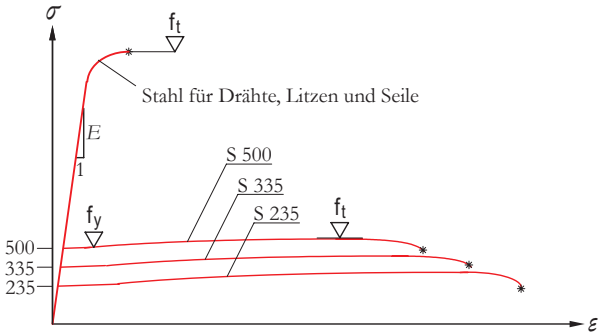


Bild 5.10: Spannungs-Dehnungs-Kurven verschiedener Stahlsorten

Die Grössenordnung der Bruchdehnung ist beachtenswert: für Stahl S235, welcher gewöhnlich in Stahlkonstruktionen verwendet wird, wird beim Bruch eine Verlängerung erreicht, welche ca. einem fünftel der Originallänge entspricht. Bei Spannstahl beträgt die Verlängerung beim Bruch nur 0.5 % der Ursprungslänge.

Es ist zu bemerken, dass der Stahl qualitativ den gleichen Verlauf im Spannungs-Dehnungs-Diagramm aufweist, unabhängig davon, ob er auf Druck oder auf Zug beansprucht wird (Bild 5.8c).

Der Unterschied des Verhaltens von Stahl mit demjenigen von Glas ist sehr ausgeprägt: wie im Abschnitt 5.5 gezeigt, ist das Verhalten von Glas sehr spröd. Der Bruch erfolgt schlagartig, ohne jegliche Vorankündigung. Das Verhalten von Stahl ist demgegenüber wesentlich gutmütiger; Stahl ist ausgesprochen *duktil*, d.h. *verformungsfähig*. Vernünftig konstruierte Stahlbauten haben den grossen Vorteil, dass sich Probleme mit der Tragfähigkeit durch grosse Verformungen ankündigen. Dies ist im Allgemeinen von grossem Vorteil für die Sicherheit und im Speziellen sehr vorteilhaft für Bauwerke, welche grossen Erdbebeneinwirkungen ausgesetzt sein können. Hier können die kontrollierten, grossen plastischen Verformungen zur Energiedissipation herangezogen werden. Aus dem Bild 5.10 ist aber auch ersichtlich, dass die Duktilität des Stahls mit zunehmender Festigkeit abnimmt, d.h. Stahl spröder wird.

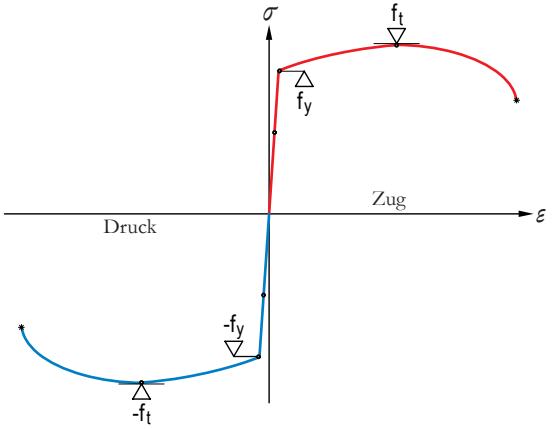


Bild 5.11: Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Aluminim

Viele andere Baustoffe weisen ein Verhalten auf, welches zwischen den beiden beschriebenen Extremen liegt: dem sehr duktilen Verhalten von Stahl und dem spröden Verhalten von Glas.

5.8 Materialverhalten des Aluminiums

Das Verhalten von Aluminium (Bild 5.11) entspricht weitgehend demjenigen des Stahls mit hohen Festigkeiten und weist kein sogenanntes Fliessplateau auf. Die Materialkennwerte sind wie folgt:

1. Elastizitätsmodul $E = 70'000$ N/mm^2
2. Fliessgrenze $f_y = 180 \div 300$ N/mm^2
3. Zugfestigkeit $f_t = 200 \div 350$ N/mm^2
4. Temp.-ausdehnungskoeff. $\alpha_T = 0.024$ ‰/ °C

5.9 Materialverhalten des Betons

Das Verhalten des Betons hängt vor allem von der Art der Beanspruchung ab. Auf Zug verhält sich Beton recht spröd, ähnlich wie Glas. Der Bruch erscheint schlagartig infolge eines Risses, welcher sich senkrecht zur Beanspruchungsrichtung entwickelt. Die Zugfestigkeit des Betons wird mit f_t (tension = Zug) bezeichnet. Wenn der Beton dagegen auf Druck beansprucht wird, weist er ein ganz anderes Verhalten auf. Oberhalb einer gewissen inneren Kraft entstehen Risse parallel zur Beanspruchungsrichtung, welche eine irreversible Verformung zur Folge haben. Die Beanspruchung kann dann

Betonart	Elastizitätsmodul E [N/mm^2]	Druckfestigkeit f_c [N/mm^2]	Zugfestigkeit f_t [N/mm^2]	Temperaturausdehnungskoeffizent α_T [‰/ °C]	Raumlast [kN/m^3]	
C 12/15	28'000 ... 34'000	12	1.1 ... 2.0	0.01	25	Beton mit wenig Zement und viel Wasser
C 20/25	30'000 ÷ 36'000	20	1.5 ÷ 2.9			gewöhnlicher Beton
C 35/45	34'000 ÷ 42'000	35	2.2 ÷ 4.2			Beton mit viel Zement und wenig Wasser
C 55/65	37'000 ÷ 44'000	55	2.9 ÷ 5.3			

Tabelle 5.2: Materialkennwerte von Beton

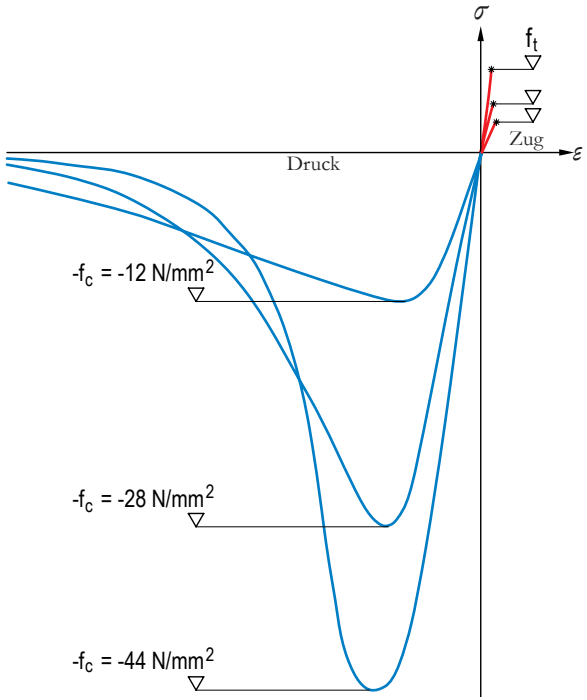


Bild 5.12: Spannungs-Dehnungs-Verhalten von drei Betonarten

	Stahl S500	Beton C20/25	Verhältnis Stahl/Beton
Elastizitätsmodul E [N/mm²]	210'000	~ 33'000	~ 6 : 1
Zugfestigkeit f_t [N/mm²]	580	~ 2.2	~ 300 : 1
Bruchdehnung ε_t [‰]	140	0.06	~ 2'000 : 1

Tabelle 5.3: Gegenüberstellung der Eigenschaften von Stahl und Beton

noch ein wenig gesteigert werden, bevor die *Druckfestigkeit* f_c (compression = Druck) erreicht wird. Bei weiterer Belastung entstehen noch weitere Risse, welche eine Abnahme der Festigkeit bewirken. Die Druckfestigkeit des Betons ist ca. zehn mal grösser als seine Zugfestigkeit.

Wird der Gehalt des Zementes, die Art der Gesteinskörnung (Kies und Sand) oder vor allem der Wassergehalt verändert, dann entstehen Betone mit unterschiedlichen Festigkeiten. Die Bezeichnung des Betons, z.B. C20/25 (concrete = Beton) enthält die an Prüfzylindern gemessene Betondruckfestigkeit (Zylinderdruckfestigkeit f_c = 20 N/mm²) und die an Prüfwürfeln ermittelte Betondruckfestigkeit (Würfeldruckfestigkeit f_c' = 25 N/mm²), welche infolge der Versuchsbedingungen höher liegt als die Zylinderdruckfestigkeit. Die Berechnung erfolgt mit der Zylinderdruckfestigkeit.

Im Bild 5.12 ist das Spannungs-Dehnungsverhalten von drei verschiedenen Betonarten dargestellt. Im Gegensatz zum Stahl ist der Elastizitätsmodul von der Betonart abhängig. Weiter fällt auf, dass ähnlich wie beim Stahl die *Duktilität des Betons mit zunehmender Festigkeit abnimmt*, d.h., dass der Beton mit zunehmender Festigkeit unter Druckbeanspruchung spröder wird.

Tabelle 5.3 zeigt einen Vergleich der mechanischen Eigenschaften des Betons mit denjenigen des Stahls. Es ist ersichtlich, dass sehr grosse Unterschiede vorhanden sind, welche die unterschiedlichen Anwendungsarten dieser beiden Materialien begründen.

5.10 Materialverhalten von Natursteinen

Beton ist eigentlich ein künstlicher Stein (Konglomerat). Es erstaunt deshalb nicht, dass viele Steinarten ein qualitativ ähnliches Verhalten aufweisen wie Beton. Die verschiedenen Steinarten unterscheiden sich jedoch beträchtlich in Bezug auf ihre Festigkeitswerte. Im Allgemeinen haben die Sedimentgesteine wie Sandstein, Konglomerat oder Kalkstein kleinere Festigkeiten und Elastizitätsmodule als die metamorphen und kristallinen Gesteine wie Marmor, Gneis, Granit oder Basalt. (Bild 5.13).

Genau wie beim Beton variiert auch beim Stein das Verhalten des auf Druck beanspruchten Materials mit der Festigkeit. Betone und Steine mit *kleinen Festigkeiten* weisen *relativ grosse irreversible Verformungen* auf, zum Teil vor, oft jedoch nach dem Erreichen der Druckfestigkeit. Materialien mit *hoher Festigkeit* verhalten sich dagegen wesentlich *spröder*. Beim Erreichen der Druckfestigkeit bilden sich schlagartig unzählige Risse, welche einen explosionsartigen Bruch verursachen; das Material löst sich in Splitter auf.

Auch der *Bruch unter Zugbeanspruchung* erfolgt *sehr spröd*; er wird ausgelöst durch einen einzigen, senkrecht zur Beanspruchungsrichtung verlaufenden Riss (Trennbruch).

5.11 Materialverhalten des Holzes

Holz ist ein vorwiegend aus Zellulose bestehendes Material. Unter dem Mikroskop erkennt man, dass Holz eine *eigene innere Tragstruktur* aufweist. Es besteht aus aneinandergereihten Röhrchen und hat einen ähnlichen Aufbau wie Wellkarton.

Das mechanische Verhalten von Holz, *in Faserlängsrich-*

Art des Steines	Elastizitätsmodul E [N/mm²]	Zugfestigkeit f_t [N/mm²]	Druckfestigkeit f_c [N/mm²]	Raumlast [kN/m³]	Temperaturausdehnungskoeffizent α_T [‰/°C]
Sandstein	6'000 ÷ 20'000	1 ÷ 2	10 ÷ 60	27	0.08
Marmor	60'000 ÷ 90'000	2 ÷ 15	80÷130	28	0.06
Gneis und Granit	20'000 ÷ 50'000	2 ÷ 15	80÷180	30	0.03

Tabelle 5.4: Mechanische Eigenschaften von Stein

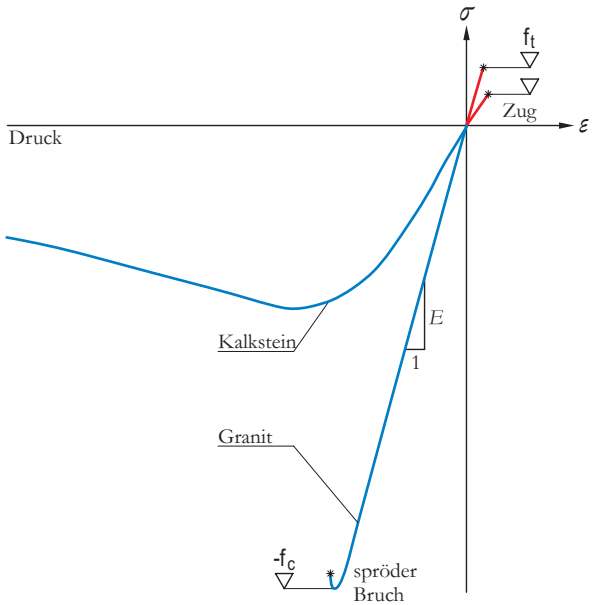


Bild 5.13: Spannungs-Dehnungs-Linien verschiedener Steine

tung beansprucht, ist sehr ähnlich wie dasjenige anderer Materialien mit einer *ausgeprägten elastischen Phase*. Wird Holz auf Zug über eine gewisse Grenze hinaus beansprucht, so wird es überbeansprucht, es entstehen Risse, und es verliert seine Festigkeit. Unter Druckbeanspruchung beobachten wir ein Zerquetschen und Instabilwerden der Wände der Röhrchen, was zu irreversiblen Verformungen führt. Nach dem Erreichen der Druckfestigkeit f_c kann Holz noch mit beträchtlichen plastischen Verformungen weiterbelastet werden, wobei die Spannung langsam abnimmt (Bild 5.14).

Holzart	Rohdichte ρ [kg/m³]	Elastizitätsmodul E [N/mm²]	Zugfestigkeit f_t [N/mm²]	Druckfestigkeit f_c [N/mm²]	Temperaturausdehnungskoeffizent α_T [‰/°C]
Balsa	80 ÷ 200	2'500 ÷ 6'000	16÷22	8÷18	
Fichte - ohne Fehler - Konstruktionsholz	400 ÷500	15'000 11'000	30 13	30 20	0.005
Buche	600 ÷ 750	10'000	17	22	
Eiche	600 ÷ 800	10'000	17	22	0.008

Tabelle 5.5: Mechanische Eigenschaften von Holz (nach SIA 265)

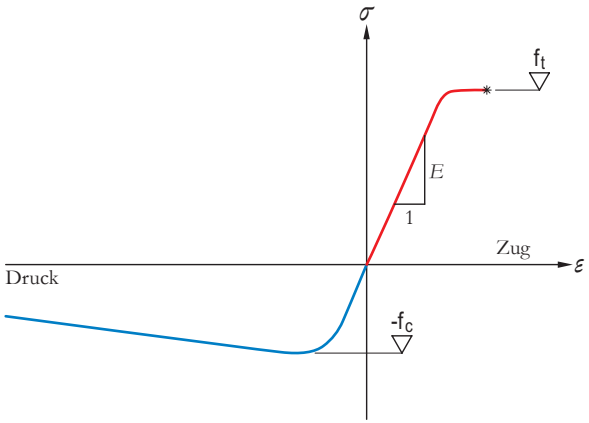


Bild 5.14: Spannungs-Dehnungs-Kurve von Holz

Die *verschiedenen Holzarten* haben *unterschiedliche mechanische Eigenschaften*, welche vor allem von der Dichte des Materials abhängig sind, also von der Menge von Zellulose und der Menge an Leerräumen in Abhängigkeit des totalen Volumens (Tabelle 5.5). Im Gegensatz zum Beton und zum Stahl ist beim Holz die Zugfestigkeit grösser als die Druckfestigkeit.

Beim Holz ist darauf zu achten, dass es in Abhängigkeit der *inneren Feuchte* eine *Volumenänderung* erfährt: Holz schwindet beim Austrocknen und quillt bei Wasseraufnahme infolge des kapillaren Saugens der Röhrchen.

5.12 Bemessung: Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit

Unter Bemessung bzw. Dimensionierung wird die Ermittlung der erforderlichen Bauteilabmessungen verstanden. In den modernen Normen werden zwei verschiedene Grenzzustände unterschieden:

1. der Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
2. der Grenzzustand der Tragsicherheit.

In diesem Abschnitt wird der Grenzzustand der *Gebrauchstauglichkeit* behandelt.

Die Nachweise, welche zu führen sind, sollen sicherstellen, dass das Tragwerk sich unter den *Lasten auf dem Gebrauchsniveau*, d.h. den so genannten *Gebrauchslasten* vernünftig verhält. Es geht namentlich darum, das Tragwerk so auszubilden, dass die *Verformungen* der einzelnen Tragelemente des Bauwerkes sich innerhalb festgelegter Grenzwerte bewegen. Diese *Grenzwerte* sind im Allgemeinen in den SIA-Normen festgelegt und werden im Spezifischen für jedes Bauwerk in der sogenannten *Nutzungsvereinbarung* mit der Bauherrschaft vereinbart. Die Nutzungsvereinbarung ist ein Dokument, welches die Einwirkungen, auf welche die einzelnen Bauteile ausgelegt werden müssen, die Grenzwerte der Verformungen, und weitere objektspezifische Kriterien, welche für die einwandfreie Nutzung des Bauwerkes einzuhalten sind, festhält. Mit der Begrenzung der Verformungen ist in der Regel auch ein schwingungsfreies Verhalten sichergestellt. Die in der Nutzungsvereinbarung mit der Bauherrschaft abgemachten Verformungseinschränkungen sind im juristischen Sinn als privat-rechtiche Regelungen zu verstehen, welche somit mit der Bauherrschaft ausgehandelt werden können.

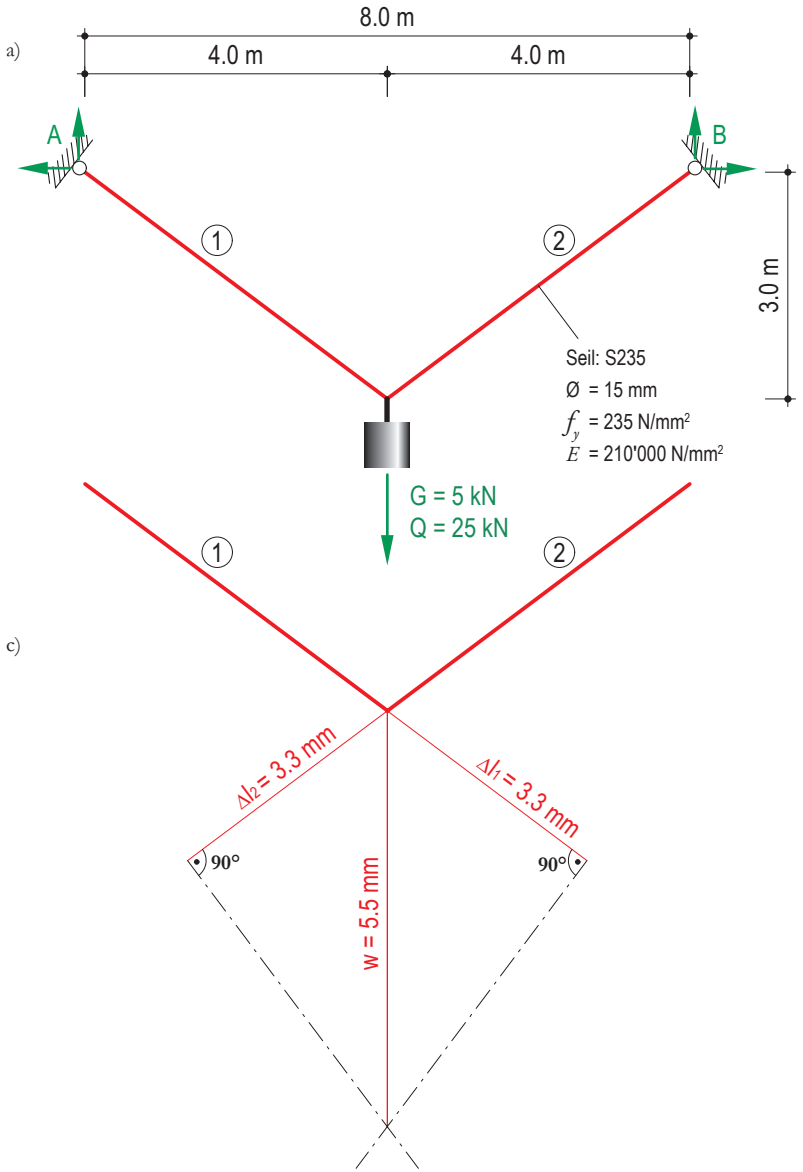
Die Berechnung der Verformungen soll an einem konkreten Beispiel behandelt werden. Im Bild 5.15a ist ein Seil dargestellt, an welchem ein Behälter aufgehängt ist, welcher mit Wasser gefüllt werden kann. Der Behälter hat eine Eigenlast von 5 kN und fasst total 2500 Liter Wasser, was einer Nutzlast von 25 kN entspricht. Die *gesamte Last* beträgt somit auf *Gebrauchsniveau*

$$Q_{tot} = G + Q = 5 + 25 = 30 \text{ kN}$$

Im Bild 5.15b sind alle inneren Kräfte sowie die Auflagerkräfte gemäss Abschnitt 3.1 ermittelt worden.

Die inneren Kräfte verursachen eine Verformung des Seiles, bedingt durch die Verlängerung der beiden Seilsegmente. Ausgehend von der Querschnittsfläche A = 177 mm² und von der Länge der beiden Seilsegmente $l_1 = l_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$, ergibt sich die Verlängerung der Seilsegmente unter den inneren Seilkräften

$$\Delta l_i = \frac{Z_i \cdot l_i}{A_i \cdot E} = \frac{25000\text{N} \cdot 5000\text{mm}}{210000\text{N/mm}^2 \cdot 177\text{mm}^2} = 3.3 \text{ mm}$$



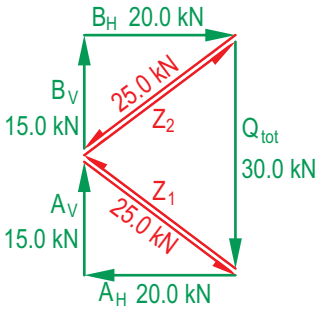


Bild 5.15: Ermittlung der Seillasten und Verformungen auf Gebrauchsniveau

$Z_1 = Z_2 = 25$ kN gemäss Abschnitt 5.3 zu:
Im Bild 5.15c wird gezeigt, wie die neue Form des Seiles mit den unter der Last verlängerten Seilsegmenten konstruiert werden kann. Dabei wird angenommen, dass die Verformungen klein sind, sodass die Auslenkung der Seilsegmente rechtwinklig linear zum ursprünglichen Seilsegment abgetragen werden kann.

Streng genommen folgt diese Auslenkung einem Segment eines Kreises, dessen Ursprung sich am gegenüberliegenden Ende des Seilsegmentes befindet. Die vorgenommene Linearisierung hat bei kleinen Verformungen keinen nennenswerten Einfluss auf das Resultat. Aus der Konstruktion gemäss Bild 5.15c kann die Einsenkung des Seiles in der Achse der Wirkungslinie der Last herausgemessen werden zu w = 5.5 mm.

Der Wert w muss *kleiner* sein als der in der Nutzungsvereinbarung *festgelegte Wert*. Ist dies nicht der Fall, so kann entweder versucht werden, die Eigenlast des Behälters zu reduzieren, was beim vorliegenden Verhältnis von Nutzlast zu Eigenlast kaum zum Ziel führen wird, oder es kann der *Querschnitt des Seiles vergrössert* werden, da die Verlängerung des Seilsegmentes umgegehrt proportional zu dessen Querschnittsfläche ist.

Wie im Abschnitt 3.8 gezeigt wurde, führt eine Veränderung des Angriffspunktes der Lasten zu wesentlich grösseren Formänderungen des Seiles. Deshalb sind in diesen Fällen in der Regel die im Abschnitt 3.9 beschriebenen konstruktiven Massnahmen erforderlich, um die Kriterien der Gebrauchstauglichkeit erfüllen zu können.

5.13 Bemessung: Grenzzustand der Tragsicherheit

Die Nachweise der Tragsicherheit, welche zu führen

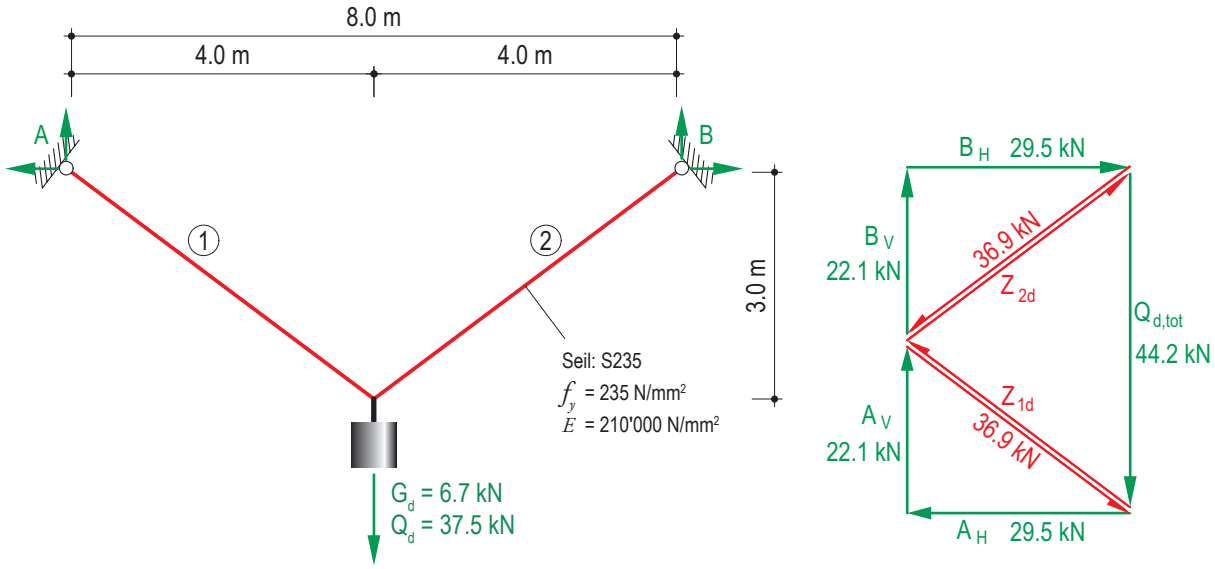


Bild 5.16: Ermittlung der Seillasten auf Bemessungsniveau

sind, sollen sicherstellen, dass unter den so genannten *Bemessungslasten* ein Versagen des Tragwerks ausgeschlossen ist. Es geht namentlich darum, das Tragwerk so auszubilden, dass die *Widerstände* der einzelnen Tragelemente des Bauwerkes in jedem Fall grösser sind als die maximal auftretenden inneren Kräfte. Die zu berücksichtigenden Kombinationen von Lasten werden aus so genannten *Gefährdungsbildern* abgeleitet und als *Bemessungssituationen* bezeichnet. Auch diese werden im Spezifischen für jedes Bauwerk in der *Nutzungsvereinbarung* sowie in der *Projektbasis* festgelegt. Die Projektbasis ist ein die Nutzungsvereinbarung ergänzendes Dokument, welches vor allem die ingenieurspezifischen Grundlagen der Bemessung des Tragwerkes enthält und somit im Gegensatz zur Nutzungsvereinbarung für den nicht fachkundigen Bauherrn schwieriger zu verstehen ist. Alle mit der Tragsicherheit verbundenen Gegebenheiten haben im Gegensatz zu denjenigen der Gebrauchstauglichkeit im juristischen Sinn öffentlich-rechtlichen Charakter. Sie können nicht mit der Bauherrschaft ausgehandelt werden. Es handelt sich somit bei der Tragsicherheit um ein *härteres Kriterium* als bei der Gebrauchstauglichkeit.

Der Nachweis der Tragsicherheit soll anhand des im Abschnitt 5.12 behandelten Seiltragwerks durchgeführt werden. Da das Versagen des Seiles unter allen Umständen ausgeschlossen werden muss, werden *Sicherheitsfaktoren* eingeführt. Die Einwirkungen, d.h. im behandelten Beispiel die Lasten, werden mit so genannten *Lastbeiwerten* multipliziert. Es wird somit mit Lasten gerechnet, welche höher sind, als die in Wirklichkeit gemäss Nutzungsvereinbarung maximal vorgesehenen. Mit dieser Reserve wird eine nie auszuschliessende Überbelastung des Tragwerks abgedeckt. Die Sicherheitsfaktoren sind in den technischen Normen festgelegt. In der Schweizer Norm (die europäischen Normen enthalten ähnliche Werte) lauten sie wie folgt:

1. ständige Lasten γ_G = 1.35
2. veränderliche Lasten, inkl. Windlast: γ_Q = 1.50

Die zu berücksichtigende Last setzt sich im Beispiel aus den um den Lastbeiwert γ_G erhöhten Eigenlasten und den um den Lastbeiwert γ_Q erhöhten Nutzlasten zusammen. Die entsprechende Last wird als *Last auf dem Bemessungsniveau*, bzw. *Bemessungslast* $Q_{tot,d}$ bezeichnet (design = Bemessung):

$$Q_{tot,d} = \gamma_G \cdot G + \gamma_Q \cdot Q =$$
$$= 1.35 \cdot 5 + 1.5 \cdot 25 = 44.2 \text{ kN}.$$

Im Bild 5.16 werden die inneren Kräfte auf Bemessungsniveau im Seil unter den Bemessungslasten ermittelt:

$$Z_{1d} = Z_{2d} = 36.9 \text{ kN} \cong 37 \text{ kN}$$

Um genügend vorsichtig zu sein, muss im Weiteren berücksichtigt werden, dass auch die Festigkeit des Materials und die Querschnittsfläche kleiner als vorgesehen sein können. In der Tat sind im Stadium der Projektierung des Tragwerkes die Festigkeitswerte des Materials, welches bei der Ausführung verwendet wird, noch nicht genau bekannt.

Aus diesem Grund muss der Tragwiderstand des Tragwerks bei der Berechnung reduziert werden, indem die nominelle Materialfestigkeit durch einen weiteren *Sicherheitsfaktor*, den so genannten *Widerstandsbeiwert* γ_M, reduziert wird, welcher von der Art des Materials abhängt.

Dieser Faktor ist abhängig von der Streuung der Festig-

keitswerte des Materials. Stahl weist dank seiner sehr sorgfältig kontrollierten Produktion eine viel kleinere Streuung der Festigkeitswerte auf als beispielsweise Holz (Knoten, Schwindrisse, diverse Imperfektionen) oder Mauerwerk. Die Widerstandsbeiwerte für die gängigen Baumaterialien sind:

1. Stahl: $\gamma_M = 1.05$
2. Betonstahl: $\gamma_M = 1.15$
3. Beton: $\gamma_M = 1.50$
4. Holz: $\gamma_M = 1.50 \div 1.70$
5. Mauerwerk: $\gamma_M = 2.00$

Nach Einführung des Bemessungswertes der Festigkeit $f_d = f/\gamma_M$ erhält man den *Tragwiderstand* Z_{Rd} (Resistance = Widerstand) der Seilsegmente aus Stahl S235 *auf Bemessungsniveau*:

$$Z_{Rd} = f_d \cdot A$$
$$Z_{Rd} = 235/1.05 \cdot 177 = 39614 \text{ N} = 39.6 \text{ kN}$$

Die *Bedingung für die Tragsicherheit* sagt aus, dass die Bemessungswerte der inneren Kräfte kleiner sein müssen als die Bemessungswerte der Tragwiderstände:

$$Z_{id} \leq Z_{Rd}$$
$$Z_{1d} = Z_{2d} = 36.9 \text{ kN} \leq Z_{Rd} = 39.6 \text{ kN}$$

mit Z_{1d} und Z_{2d} der Bemessungswerte der inneren Kräfte in den zwei Seilstücken. Die Bedingung ist erfüllt und somit der Nachweis der Tragsicherheit für das Seil erbracht.

Die *Bemessung* eines Tragelementes auf Tragsicherheit, d.h. die Ermittlung der erforderlichen Querschnittsfläche eines Tragelementes, kann somit sehr einfach durch Division des Bemessungswertes der inneren Kraft durch den Bemessungswert der Festigkeit f_d gewonnen werden:

$$A_{erf} \geq \frac{Z_d}{f_d}$$

Im behandelten Beispiel bedeutete das:

$$A_{erf} \geq \frac{37'000}{235/1.05} = 165 \text{ mm}^2$$

gewählt: ø 15 mm mit $A_{vorh} = 177 \text{ mm}^2$

Im Abschnitt 5.2 wurde gezeigt, dass zu grosse Verformungen unter Gebrauchslasten durch Vergrösserung der Seilquerschnittsfläche reduziert werden können. Es sind somit Fälle möglich, bei welchen sich die Querschnittsflächen der Tragelemente nicht aus dem Kriterium der Tragsicherheit, sondern aus demjenigen der Gebrauchstauglichkeit ergeben. Im Folgenden werden wir uns bei der Bemessung vereinfachend vorwiegend auf das Kriterium der Tragsicherheit abstützen.

5.14 Ermüdung

Wenn das Material eines Tragelementes einer Belastung unterworfen wird, welche *sehr häufig in ihrer Intensität* und evtl. auch in ihrer Richtung *variiert*, kann ein *spröder Bruch unter wesentlich kleineren Spannungen* als der Festigkeit des Materials auftreten.

Dieses Phänomen, welches als Ermüdung bezeichnet wird, hat eine große Bedeutung bei Eisenbahnbrücken, weil die beweglichen Lasten (Lokomotive und Wagen) verglichen mit den Eigenlasten relativ gross sind. Bei konventionellen Hochbauten ist die Ermüdung meistens nicht massgebend.

6 Bögen

Seile sind Tragelemente, die die von aussen einwirkenden Kräfte durch innere Zugkräfte in Seilrichtung übertragen. Wie das in den Abschnitten 2.9 und 2.10 betrachtete Beispiel der hängenden und stehenden Lampe von Poul Henningsen deutlich gemacht hat, kommt es bei der Umkehrung der Geometrie und Belastung zu einer Transformation von inneren Zugkräften in innere Druckkräfte und umgekehrt. Im Folgenden soll dieses Prinzip der Dualität genauer untersucht und auf Tragwerke angewendet werden.

6.1 Duale Tragwerke

Bei der Betrachtung von Seilen in Kapitel 3 wurde bereits darauf hingewiesen, dass eine gegebene Belastung mit einer unendlich grossen Familie von möglichen Seilgeometrien aufgenommen werden kann. Die unterschiedlichen Seillagen bewirken eine Veränderung der Lage des Pols P in Bezug auf die Resultierende *R* einer gegebenen Lastsituation im zugehörigen Kräfteplan (vgl. Bild 3.6). Infolge der engen Beziehung zwischen der Geometrie des Kräfteplans und der daraus resultierenden Geomtrie des Lageplans entsprechen die Winkel α respektive β zwischen den Auflagerkräften *A* respektive *B* und der Last *R* im Kräfteplan den Winkeln zwischen den korrespondierenden Wirkungslinien der Auflagerkräfte und der Wirkungslinie der Last im Lageplan (Bild 6.1a).

Wird der Pol P parallel zur Auflagerlinie in Richtung der Last verschoben, so verkleinern sich die Winkel α und β im Kräfteplan und damit auch im Lageplan. Da die Wirkungslinien von *A* und *B* durch die gegebenen Auflager verlaufen müssen, führt die Verschiebung von P daher zu einer Rotation der Wirkungslinien der Auflagerkräfte um die Auflager (Bild 6.1b). Je geringer im Kräfteplan die Distanz zwischen dem Pol P und der Last *R* ist, desto kleiner wird dabei die Schlankheit des Seiles im Lageplan. Der Grenzfall des auf der Wirkungslinie von *R* liegenden Pols entspricht somit einem Seil mit Schlankheit null und parallelen Auflagerkräften mit entgegengesetzer Richtung zu derjenigen der Last (vgl. Abschnitt 2.5).

Wenn der Pol über die Wirkunglinie von *R* hinaus weitergeschoben wird, so schneiden sich die Wirkungslinien der Auflagerkräfte in einem Punkt oberhalb der Auflager und erzeugen hierdurch eine Seilgeometrie, welche auf Grund der mangelnden Steifigkeit von Seilen physikalisch unmöglich ist. Diese virtuelle Seilgeometrie wird als *Bogen* bezeichnet. Bögen können somit verstanden werden als *invertierte Seile*. Durch Punktspiegelung des Pols P an dem Schnittpunkt der *Auflagerlinie* AB mit der Wirkungslinie der Resultierenden *R* wird der Kräfteplan eines Bogens in den Kräfteplan eines Seils überführt, dem *dualen Seil*. Umgekehrt kann hierdurch auch zu jedem Seil ein *dualer Bogen* definiert werden.

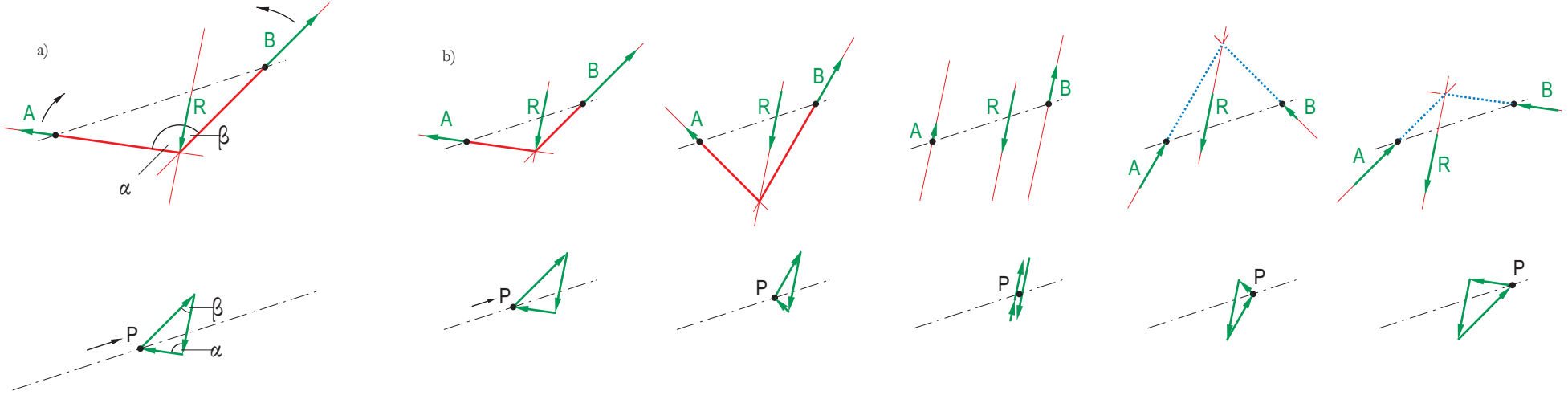


Bild 6.1: Dualität von Seil- und Bogentragwerk

Diese Dualität erlaubt es auch auf einfache Art, bekannte Zusammenhänge für Seile auf Bögen zu übertragen. Wie aus Bild 6.1b ersichtlich wird, muss bei der Übertragung jedoch berücksichtigt werden, dass die durch die äussere Kraft *R* erzeugten inneren Kräfte in einem Bogen nicht Zugkräfte sind wie in einem Seil, sondern Druckkräfte.

6.2 Gegenüberstellung einfacher Bogen- und Seiltragwerke

Der einfachste Fall eines Bogens ist im Bild 6.2 dargestellt. Der Pylon der Severinsbrücke in Köln ist am oberen Ende einer grossen vertikal nach unten gerichteten Einzelkraft ausgesetzt, welche aus den Kräften der Schrägseile resultiert. Im Bild 6.3a ist die Ermittlung der inneren Kräfte in einem entsprechenden System mit Hilfe von Subsystemen dargestellt und der Lösung eines dualen Seiltragwerks (Bild 6.3b) gegenübergestellt.



Bild 6.2: Severinsbrücke, Köln, 1958-59, Arch.: Gerd Lohmer, Ing.: Fritz Leonhardt

Die Dualität zwischen den Seilen und den Bögen gilt unabhängig von der Art der Belastung (Bild 6.4). Ist die *Last gleichmässig verteilt*, so entspricht die Form des Bogens derjenigen einer *Parabel*. Wird der Bogen dagegen durch seine *Eigenlasten* beansprucht, so entspricht seine optimale Form derjenigen der *Kettenlinie*. Bei nicht allzu kleinen Schlankheiten sind jedoch wie beim Seil die Unterschiede zwischen Parabel und Kettenlinie gering.

Bei den Bögen wird die Querschnittsfläche oft der Beanspruchung angepasst. Infolge der Querschnittsvergrösserung im Auflagerbereich sind dann auch die Eigenlasten in dieser Zone grösser. Die optimale Bogenform wird dementsprechend im Auflagerbereich

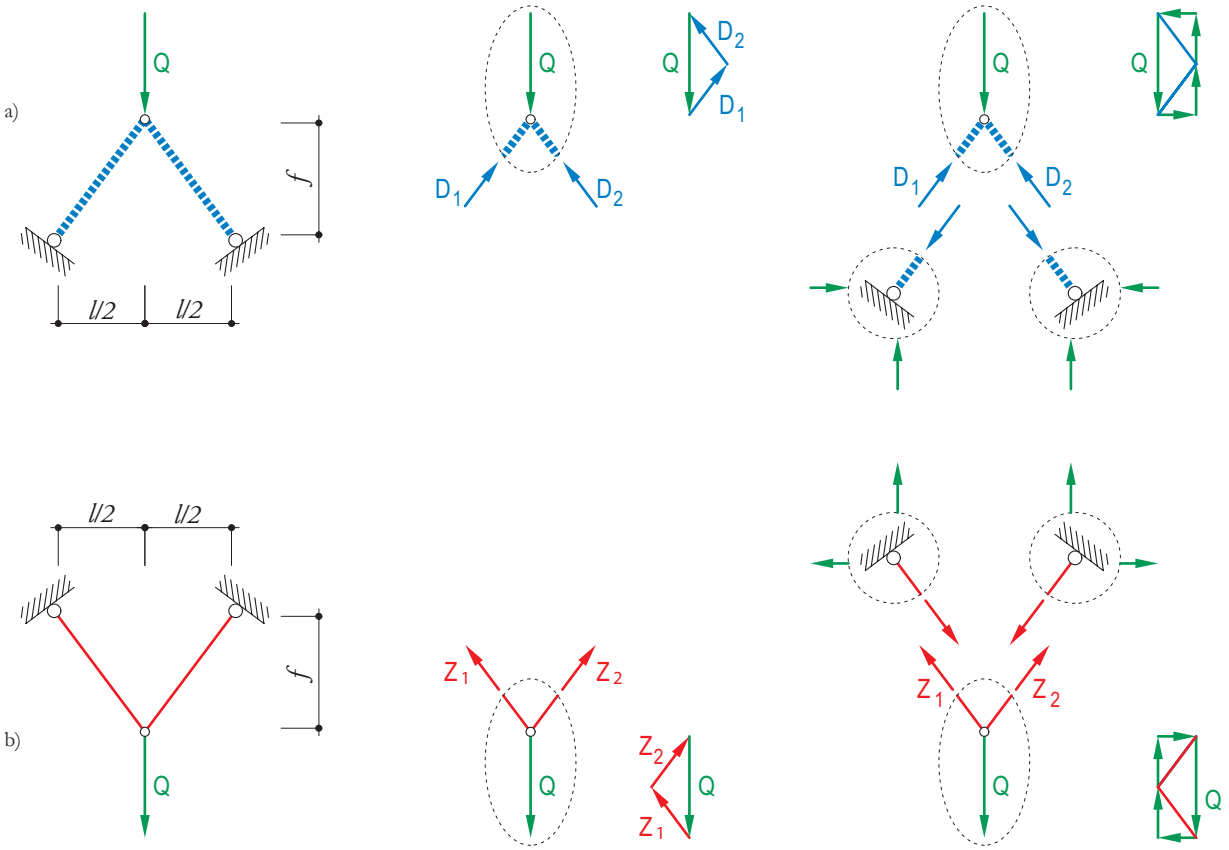


Bild 6.3: Vergleich von Bogen und dualem Seil unter einer Last *Q*

eine Zunahme der Krümmung gegenüber der Parabel respektive Kettenlinie aufweisen, und daher steiler verlaufen. Beim im Bild 6.5 dargestellten Gateway Arch von Eero Saarinen (1910-1961) mit einer Spannweite l und einer Pfeilhöhe f von 192 m ist die Veränderung der Querschnittsfläche mit der Zunahme der Eigenlasten zu den Auflagern hin und die damit verbundene Veränderung der Bogenform offensichtlich. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist dies nicht nur eine Antwort auf die Verteilung der inneren Kräfte, sondern auch eine Möglichkeit zur Verbesserung des Tragverhaltens unter veränderlichen Lasten sowie unter Windlasten.

6.3 Historische Anwendungen

Gegen Ende des 17. Jahrhunderts haben viele Architekten eine Regel gesucht, um diejenige Form der Bögen zu ermitteln, welche die gewünschten statischen Anforderungen am besten erfüllt. Die Lösungen wurden empirisch hergeleitet: das Resultat wurde mit Hilfe von Modellen gefunden und das Experiment übte eine entscheidende Rolle aus. Nur dank dem Studium der Seilsysteme gelang es, das Problem korrekt zu formulieren. Dieses Problem beschäftigte damals die besten Mathematiker wie etwa Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) oder die Gebrüder Johann (1667-1748) und Jakob Bernoulli (1654-1705).

Die erste praktische Anwendung geht auf den Mathematiker und Ingenieur Giovanni Poleni (1683-1761) zurück. Er wurde mit dem Nachweis der Stabilität der Kuppel des Petersdoms in Rom beauftragt (Bild 6.6) und mit der Suche nach einer Erklärung der entstandenen Risse. Poleni untersuchte dazu die Rippen, welche die Kuppel bilden. Er benützte ein Modell, welches aus einem mit Kugeln belasteten Seil bestand, wobei er jeder Kugel das Gewicht des zugehörigen Bogenabschnitts zuordnete. Im Bild 6.7 ist die Originalkonstruktion des Seilpolygons dargestellt.

Es ist Poleni auf bemerkenswerte Weise gelungen, das Tragverhalten der Kuppel erstmals theoretisch korrekt

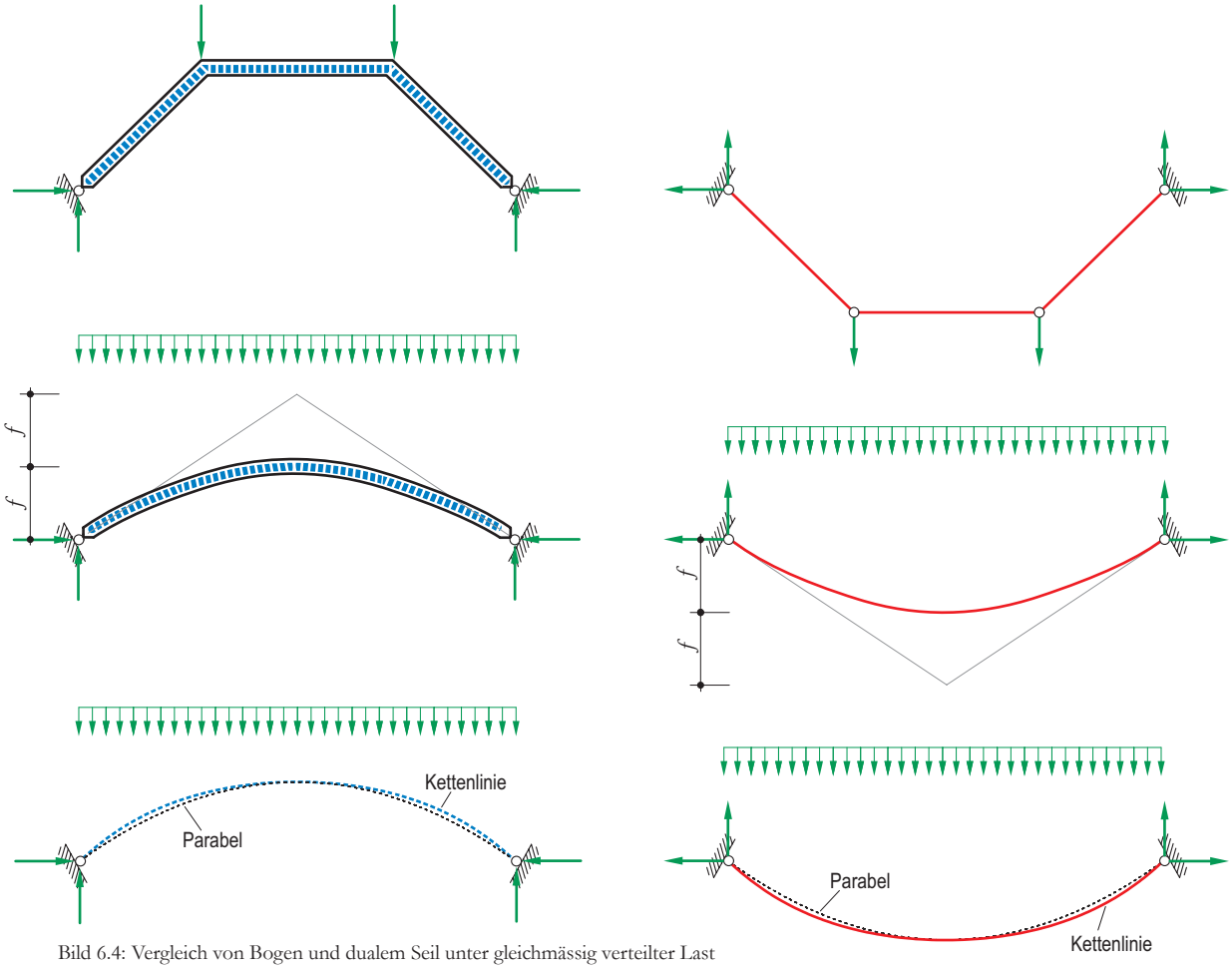


Bild 6.4: Vergleich von Bogen und dualem Seil unter gleichmässig verteilter Last



Bild 6.5: Gateway Arch, St. Louis, 1965, Arch.: Eero Saarinen, Ing.: Hannskarl Bandel

zu erfassen und hierdurch das Entstehen der Risse mit der zu grossen Abweichung der Drucklinien von den Achsen der Bogenrippen zu begründen. Auch sein Instandsetzungsvorschlag, nämlich im unteren Bereich der Kuppel eiserne Zugringe anzuordnen, zeugt von Polenis herausragendem Verständnis der grundlegenden mechanischen Zusammenhänge des Tragverhaltens der Bögen. Aus kinematischer Sicht (vgl. Abschnitt 6.5) wurden mit dieser Massnahme weitere Verformungen des unteren Kuppelbereichs nach aussen verhindert. Aus statischer Sicht wurden die Rippenbögen durch die nach innen gerichteten Umlenkkräfte der Eisenringe zusätzlich belastet, so dass sich die Drucklinien in Richtung der Rippenachsen verschieben konnten.

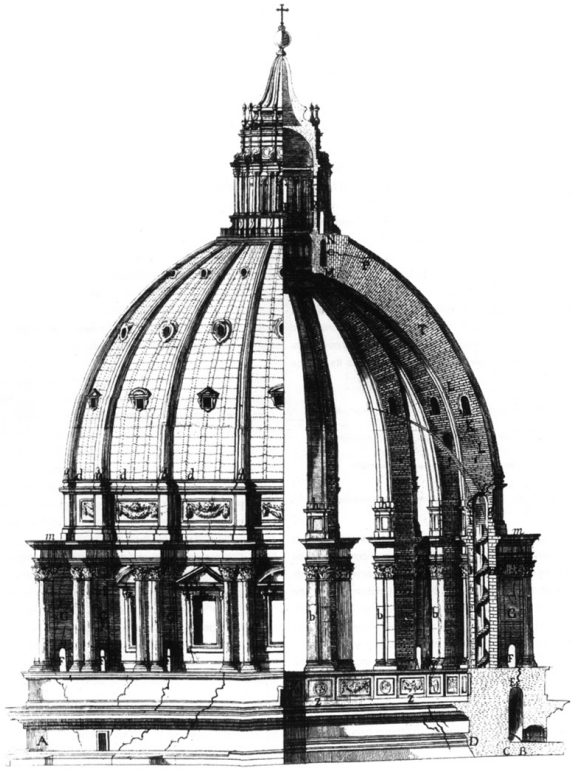


Bild 6.6: Schnitt durch die von Giacomo della Porta entworfene Kuppel des Petersdoms, Rom, 1547-1590

Die Einfachheit, mit welcher sich Seilmodelle herstellen lassen, hat immer wieder Architekten und Ingenieure dazu bewogen, die Form der zu entwerfenden Bögen mit Hilfe der Analogie zwischen den beiden Tragwerksarten zu finden, nehmen doch die Seile automatisch die statisch optimale Form der Seilpolygone an.

Im für die Architektur wichtigen Spezialfall von horizontalen Auflagern und vertikalen Lasten ergibt sich der Bogen direkt aus dem dualen Seil durch Spiegelung der Seilgeometrie an der Auflagerlinie, wie aus den Bildern 6.3 und 6.4 ersichtlich. Eine Tatsache welche sich zum Beispiel Antoni Gaudi (1852-1926) beim experimentellen Entwurf des komplexen Gewölbes für die

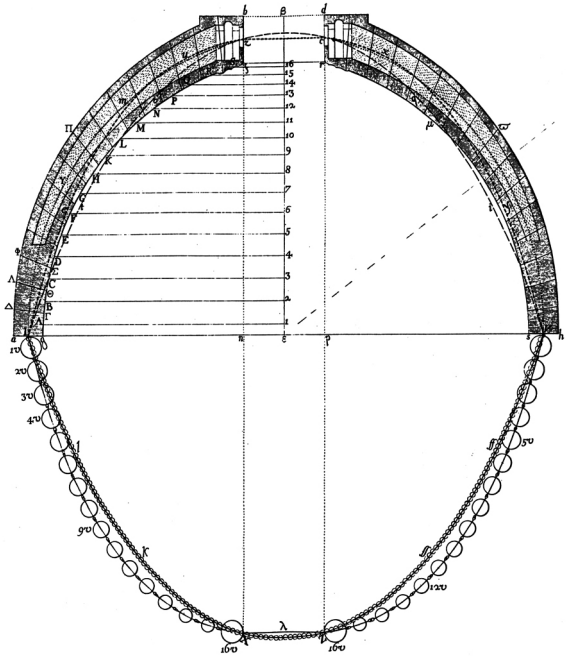


Bild 6.7: Analyse des Tragverhaltens der Kuppel des Petersdoms von Giovanni Poleni mittels grafischer Statik und dualem Seil, 1748



Bild 6.8: Antoni Gaudis Entwurf des Gewölbes der Colònia Güell durch Verwendung dualer Seile, 1898

Colonia Güell zu Nutze gemacht hat (Bild 6.8). In dem Fall von horizontalen Auflagern und vertikalen Lasten gilt für die Beziehung von Bogentragwerk und dualem Seiltragwerk folgendes:

1. die horizontalen Auflagerkräfte sind identisch
2. die vertikalen Auflagerkräfte sind invertiert und
3. die inneren Kräfte haben die gleiche Intensität, aber entgegensetztes Vorzeichen.

6.4 Tragwirkung eines Bogens unter mehreren beliebig gerichteten Lasten

Im Allgemeinen kann die Form eines Bogens unter beliebiger Belastung und Auflagergeometrie aus dem Studium des dualen Seiles durch eine affine Transformation abgeleitet werden. Aus diesem Grund ist das Vorgehen zur Bestimmung der Form, der inneren Kräfte und der Auflagerkräfte eines Bogens, auf den mehrere Lasten in beliebige Richtungen wirken, *identisch mit demjenigen bei den Seilen*. Die Resultierende kann entweder mit Hilfe von *Zwischenresultierenden* oder mit Hilfe des *Seilpolygons* (vgl. Abschnitte 2.7 und 2.8) ermittelt werden. Anschliessend kann nach der Wahl der Pfeilhöhe der Bogen mit zwei geraden Segmenten zur Aufnahme der Resultierenden aller Lasten entworfen und die Zwischensegmente mit Hilfe des Kräfteplanes wie beim Seil entwickelt werden (Bild 6.9). Falls die Lasten parallel gerichtet sind, so ist wie beim Seil auch beim Bogen die Lösung mit Hilfe von Zwischenresultierenden nicht mehr möglich (vgl. Bild 2.9).

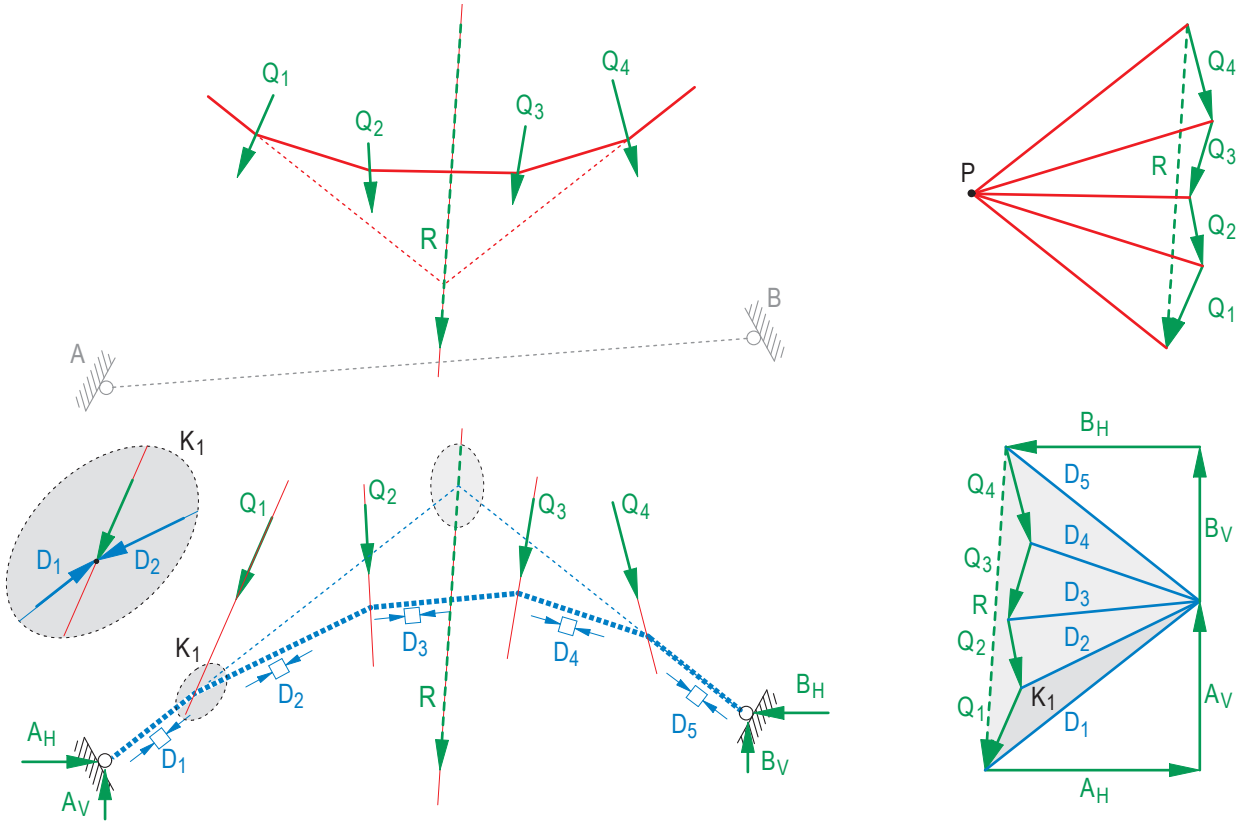


Bild 6.9: Bogen unter mehreren beliebigen Lasten

6.5 Stabilitätsversagen des Bogens unter ungleichmässig verteilten Nutzlasten

Wird ein Seil zusätzlich zu den gleichmässig verteilten ständigen Lasten durch eine veränderliche Nutzlast beansprucht, so verändert sich die Form des Seiles (vgl. Abschnitt 3.8). Aus dem Bild 6.10a ist ersichtlich, dass sich das Seil nach dem Aufbringen der veränderlichen Last q unter dieser Last nach unten verschiebt, bis es die neue Gleichgewichtslage gefunden hat. Im Moment, wo die Last aufgebracht ist, herrscht zunächst ein labiler Gleichgewichtszustand (das Seil bewegt sich!), welcher wieder in einen stabilen Gleichgewichtszustand übergeht. Die sogenannte *Kinematik*, d. h. die Bewegung der Seilsegmente unter veränderlichen Lasten, führt somit zu einem *dynamischen Verhalten* der nicht durch konstruktive Massnahmen stabilisierten Seile. Dies hat schlimmstenfalls Probleme mit der *Gebrauchstauglichkeit* zur Folge; unter der Voraussetzung dass die Festigkeitsreserven des Seiles genügen, bleibt die Tragsicherheit jedoch gewährleistet.

Im Bild 6.10b ist das gleiche Vorgehen für einen schlanken Bogen dargestellt. Hier ist ein *grundlegender Unterschied zum Seil* festzustellen: Mit der Zunahme der veränderlichen Last q hat der Bogen die Tendenz, sich unter der Last nach unten zu verformen, währenddem die Gleichgewichtsdrucklinie des Bogens sich nach oben verschieben müsste. Ohne Einfluss von aussen, d.h. ohne Anheben des Bogens bis zur Form der neuen Drucklinie, ist kein Gleichgewichtszustand möglich. Dies bedeutet, dass auch eine sehr kleine Veränderung der Lasten eine Verschiebung des Bogens aus seiner Gleichgewichtslage zur Folge hat: Es liegt ein *Instabilitätsproblem* vor! Das Problem betrifft beim Bogen, im Gegensatz zum Seil, die *Tragsicherheit*: Eine solche Instabilität führt unweigerlich zum Einsturz des Tragwerks. Die Einführung konstruktiver Massnahmen zur Stabilisierung des Bogens ist also unumgänglich.

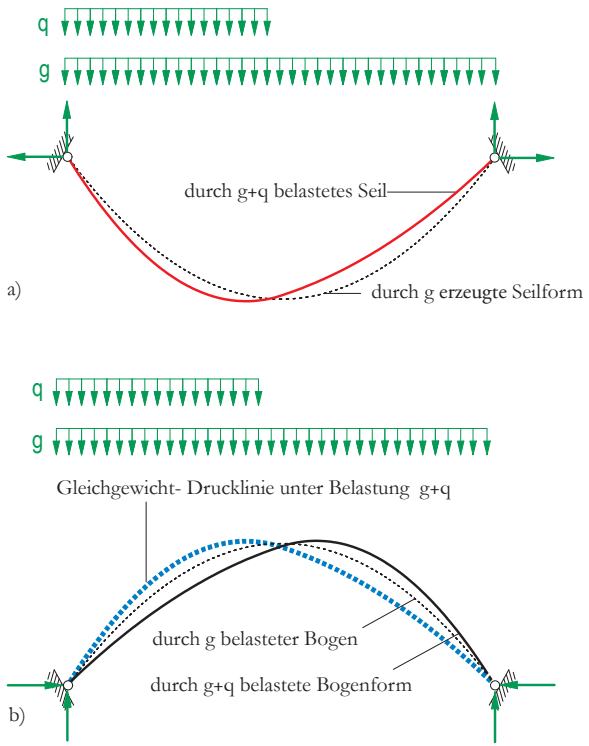


Bild 6.10: Unterschied im Verhalten von dualem Seil (a) und Bogen (b) unter veränderlichen Nutzlasten

Die systemische Situation und die sich daraus ergebende Differenz zwischen dem labilen, sich *stabilisierenden Gleichgewicht* beim Seil und diejenige des labilen, *instabilen Gleichgewichts* beim dualen Bogen kann anhand des einfachen, ebenfalls dualen Modells einer Kugel auf einer gekrümmten Flächen veranschaulicht werden (Bild 6.11).

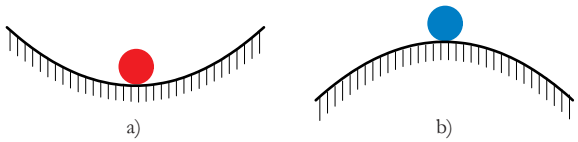


Bild 6.11: stabiles (a) und instabiles (b) Gleichgewicht

6.6 Massnahmen zur Vermeidung eines Stabilitätsversagens unter veränderlichen Nutzlasten

Im Fall der Seile ist es möglich, die Formänderungen des Tragwerks durch Erhöhung der ständigen Lasten zu reduzieren, weil die Verschiebung des Seiles eine Funktion des Verhältnisses der veränderlichen zu den ständigen Lasten ist. Auch beim Bogen führt eine entsprechende Massnahme zur Reduktion der Verschiebung der Drucklinie; da aber auch bei einer sehr kleinen Verschiebung das Gleichgewicht des Bogens ohne äussere Eingriffe nicht mehr sichergestellt werden kann, bleibt der Einsturz unvermeidbar. Aus diesem Grund *führt weder die Lösung mit Erhöhung der Eigenlasten noch die zum Seilbalken analoge Lösung zu einer Stabilisierung des Bogens.*

Stabilisierung mit zusätzlichen Druckstreben respektive Spannseilen

Wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, kann ein tragendes Seil stabilisiert werden durch Ergänzung einer Serie von stabilisierenden Seilen. Auch bei den Bögen ist die *Einführung zusätzlicher Stäbe* eine effiziente Massnahme, um die Stabilität sicherzustellen. In Bild 6.12 sind zwei einfache Möglichkeiten gezeigt, wie ein Bogen mit zwei konzentrierten Lastangriffspunkten mit Hilfe zusätzlicher Tragelemente stabilisiert werden kann.

In Bild 6.12a wird exemplarisch eine *zusätzliche Druckstrebe* eingeführt. Diese Druckstrebe wirkt, vom kinematischen Standpunkt aus betrachtet, wie ein Spriess welcher den Punkt unter der höheren Last daran hindert, sich nach unten zu verschieben. Aus statischer Sicht erlaubt das zusätzliche Element, ein zweites Bogensystem zu aktivieren welches die Nutzlast Q abzutragen vermag. Durch Superposition der beiden Tragwerke wird klar, dass nur das linke geneigte Bogensegment und das zusätzliche Tragelement beeinflusst werden, wenn die Nutzlast Q verändert wird.

In Bild 6.12b wird exemplarisch ein *zusätzliches Seilsegment* eingebaut. Dieses Seilsegment weist die duale Tragwirkung auf wie die zusätzlich eingeführte Druckstrebe. Das Seilsegment verhindert, vom kinematischen Standpunkt aus betrachtet, den schwächer belasteten

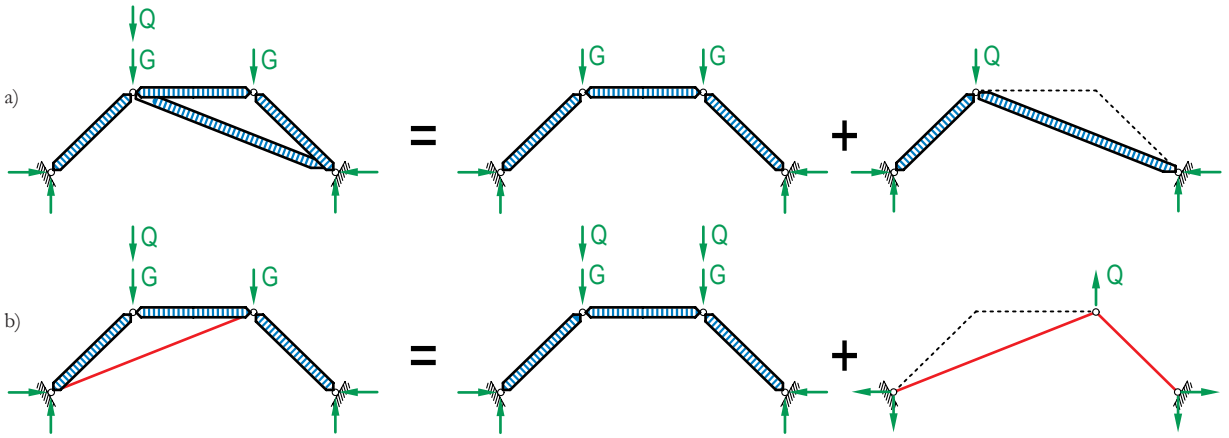


Bild 6.12: Stabilisierung eines Bogens mittels zusätzlicher Tragelemente

Punkt des Bogens daran, sich nach oben zu verschieben. Aus statischer Sicht erlaubt das zusätzliche Element, ein Seilsystem zu aktivieren, welches eine nach oben gerichtete gleich grosse Kraft wie die Nutzlast Q abzutragen vermag. Wird der Bogen ohne Seil an beiden Punkten mit $G+Q$ belastet, so resultiert durch Superposition der beiden Tragwerke am linken Punkt eine Last $G+Q$ und eine Last $G+Q-Q=G$ am rechten Punkt. Auch in diesem Fall ist somit klar, dass nur die inneren Kräfte im rechten geneigten Bogensegment und im Seil beeinflusst werden, wenn die Nutzlast Q verändert wird.

Ein *gekrümmter Bogen* unter verteilten Lasten kann mit Hilfe einer *Serie von zusätzlichen Tragelementen* stabilisiert werden. Oft werden stabilisierende Seile eingesetzt um leichte und transparente Tragwerke zu erzeugen. Sowohl die Warenhäuser GUM in Moskau (Bild 6.13) wie auch die Überdachung des Bahnhofs in Chur (Bild 6.14) weisen extrem filigrane Bögen auf, deren Stabilisierung mit Hilfe von Seilsystemen erfolgt welche zum Teil bei den Auflagern der Bögen verankert sind.

Stabilisierung mit Hilfe eines Versteifungsträgers

Die Lösung mit der Ergänzung eines *Versteifungsträgers*, wie sie bei den Seiltragwerken vor allem bei den Hängebrücken angewendet wird, kann auch dazu dienen, einen Bogen zu stabilisieren. In diesem Fall basiert die Tragwirkung auf zwei verschiedenen Prinzipien: Der Träger verteilt die konzentrierten Lasten und hindert dadurch den schlanken Bogen daran, sich zu verformen.

Die von Robert Maillart (1872-1940) entworfene Brücke über das Val Tschiel (Bild 6.15) ist hierfür ein Beispiel. Diese Bogenbrücke hat mit lediglich 23 cm Stärke, dank der aussteifenden Fahrbahnplatte, bereits einen genügend stabilen Bogen aus Stahlbeton.

Stabilisierung durch Vergrösserung der Bogenbreite

Wie bei den Seilen besteht auch bei den Bögen die Möglichkeit, den stabilisierenden Versteifungsträger mit dem Bogen zu kombinieren. Dies kann erfolgen, indem die Breite des Bogens vergrössert wird, so dass ein gedrungener Bogen entsteht. Diese Massnahme wird vor allem bei Bögen aus Material ohne nennenswerte Zugfestigkeit, beispielsweise Natursteinmauerwerk oder schwach bewehrter Stahlbeton, ergriffen. Aus kinematischer Sicht gelingt es damit, die Steifigkeit des Bogens soweit zu vergrössern, dass dieser sich un-

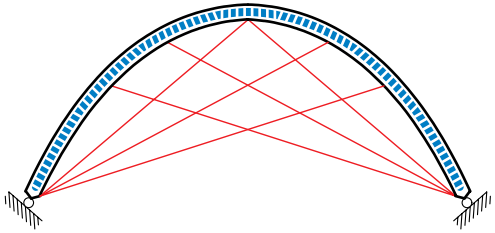




Bild 6.13: Staatliches Warenhaus GUM, Moskau, 1889-93, Arch.: Alexander Pomerantsev, Ing.: Vladimir Shukhov

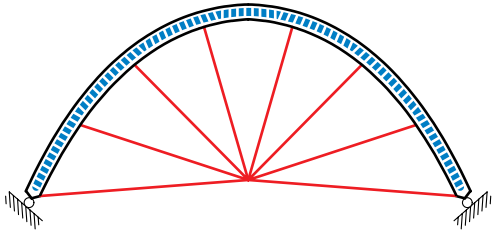




Bild 6.14: Überdachung der Postautostation, Chur, 1988, Arch.: Richard Brosi & Obrist und Partner, Ing.: Peter Rice

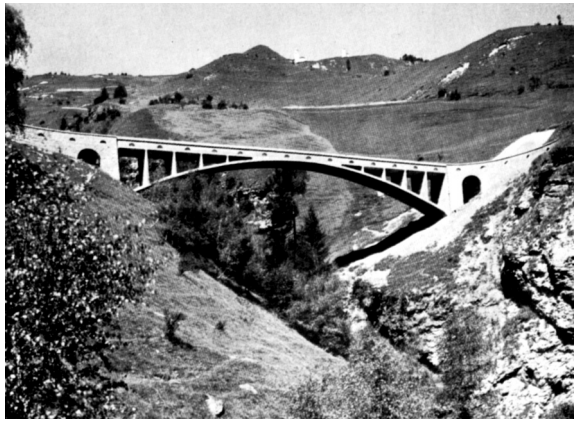


Bild 6.15: Brücke über das Val Tschiel, 1925, Arch. & Ing.: Robert Maillart

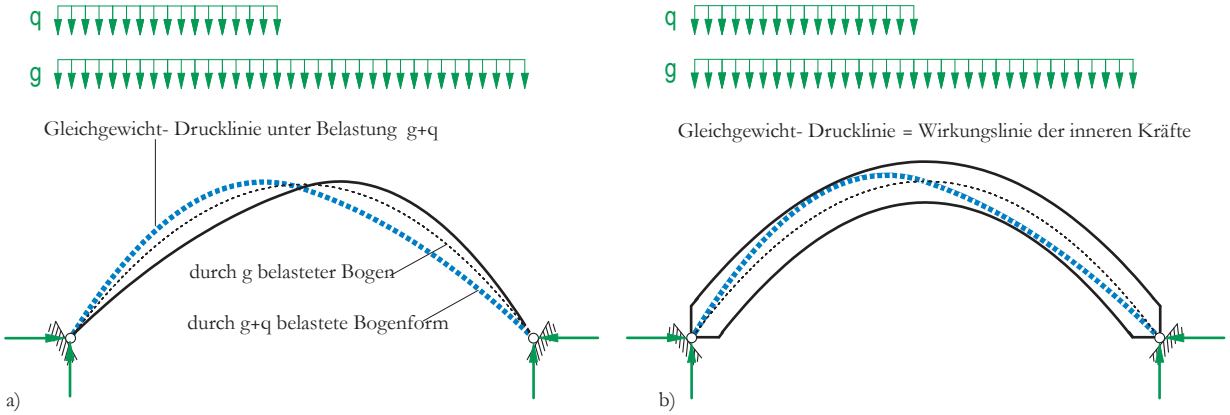


Bild 6.16: Verhalten eines schlanken (a) und eines gedrungenen (b) Bogens unter einseitiger Nutzlast

ter den veränderlichen unsymmetrischen Lasten nicht mehr nach unten bewegt. Aus statischer Sicht wird es dank der grösseren Bogenbreite möglich, *die Drucklinie im Bogen im Bereich der Nutzlasten nach oben zu verschieben* (Bild 6.16).

Wie in der Einleitung zu Kapitel 3 beschrieben, bedeutet eine Verschiebung der Drucklinie gegenüber der Bogenachse, dass der Bogen auf *Biegung* beansprucht wird. Bei den im Folgenden behandelten Bögen mit Material ohne Zugfestigkeit muss die *Drucklinie innerhalb des Bogenmaterials* verlaufen. Die Biegung ist also in diesen Fällen definiert als innere Druckkraft, welche im Querschnitt eine Exzentrizität zum Querschnittsschwerpunkt, also der Bogenachse, aufweist. Dank diesem einfachen Sachverhalt gelingt es, den Bogen weiterhin als Tragelement zu behandeln, welches nur innere Druckkräfte aufweist.

Bei einem Material, welches eine grosse Zugfestigkeit aufweist, wie etwa Stahl, kann die Drucklinie wesentlich ausserhalb des Materials liegen. Die entsprechende Tragwirkung, welche nebst den inneren Druckkräften grosse innere Zugkräfte im Bogen aufweist, sprengt den Rahmen der Überlegungen dieses Kapitels und wird im Kapitel 12 behandelt.

Zur Bemessung eines gedrungenen Bogens kann angenommen werden, dass in den Bereichen der verschobenen Drucklinie der Bogen eine *reduzierte nominelle Breite* $2 \cdot b$ aufweist, welche dem doppelten Abstand der Drucklinie vom näher gelegenen Querschnittsrand b entspricht (Bild 6.17). Auf diese Art und Weise wird sichergestellt, dass die innere Druckkraft im Schwerpunkt der überdrückten Querschnittszone liegt und somit das Integral der konstanten Spannungen in der überdrückten Zone statisch äquivalent zur inneren Druckkraft ist. Dies bedeutet aber, dass das Material ausserhalb der beanspruchten Zone $2 \cdot b \cdot t$ als nicht wirksam betrachtet wird. Es handelt sich selbstverständlich um eine Vereinfachung, welche es erlaubt, die Tragwirkung zu verstehen. Es ist jedoch zu sagen, dass unter der Voraussetzung genügender Verformungsfähigkeit (Duktilität) des Materials, dieses Vorgehen keine Näherung, sondern einen (auf der sicheren Seite liegenden) *Grenzzustand nach der Plastizitätstheorie* darstellt, der es erlaubt, die tatsächliche Tragsicherheit des Tragwerkes zu beurteilen.

Aus diesen Überlegungen wird klar, dass die Drucklinie sich nicht beliebig dem Querschnittsrand annähern kann. Die Fläche $2 \cdot b \cdot t$ muss mindestens so gross sein, dass die Festigkeit des Materials nicht überschritten wird. Der Abstand der Drucklinie vom Querschnittsrand ist somit durch das Bemessungskriterium

$$\sigma = \frac{D_d}{2 \cdot b \cdot t} \leq f_d \quad \text{begrenzt zu} \quad b \leq \frac{D_d}{2 \cdot t \cdot f_d}$$

Die erste Formel dient beim sogenannten *Nachweis* der Tragsicherheit zur Ermittlung und zum Vergleich der Spannung mit der Druckfestigkeit bei gegebener Bogengeometrie, zum Beispiel bei einem bestehenden Bauwerk. Die zweite Formel dient zur *Bemessung*, d.h. zur Festlegung der Bogenbreite bei freier Wahl der Bogengeometrie, beim Entwurf eines Bogentragwerks.

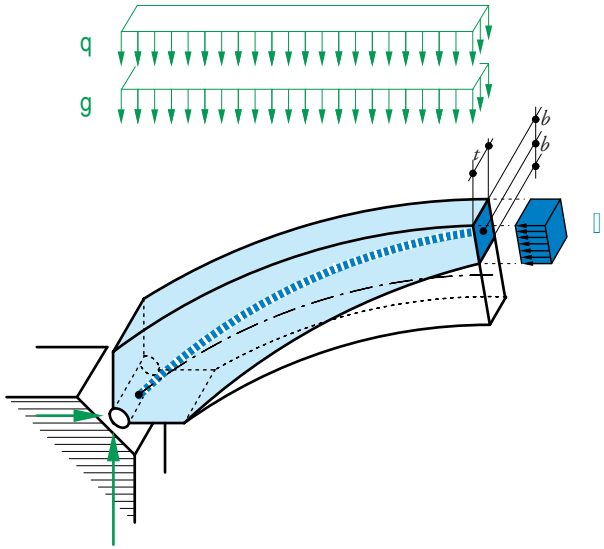


Bild 6.17: Innere Druckkräfte und Spannungen in einem gedrungenen Bogen

6.7 Beeinflussung der inneren Bogenkräfte mittels Gelenken

Beim von Gustave Eiffel (1832-1923) entworfenen Viadukt von Garabit (Bild 6.18) wurden zwei Gelenke bei den Auflagern eingeführt. Ein *Gelenk* bedeutet in konstruktiver Hinsicht, dass der Bogen im entsprechenden Querschnitt eine gegen null strebende Breite aufweist. In statischer Sicht heisst dies, dass *die innere Bogenkraft durch das Gelenk verlaufen muss.* Gelenke werden üblicherweise auf der Bogenachse angeordnet. Im Gelenkquerschnitt kann die Drucklinie des Bogens also nicht gegenüber der Bogenachse verschoben sein, so dass im Gelenkquerschnitt definitionsgemäss keine Biegung vorhanden sein kann.

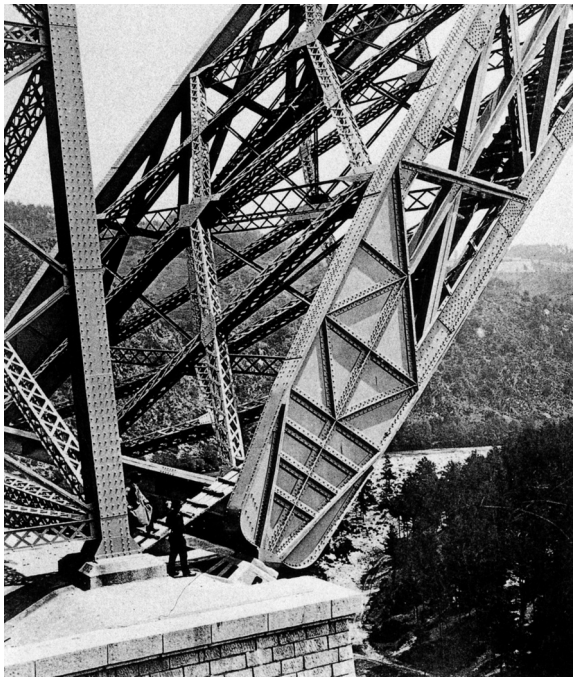


Bild 6.18: Gelenk beim Auflager des Viadukts von Garabit, bei Cantal, 1884, Arch.: Gustave Eiffel, Ing.: Maurice Koechlin

Interessant ist die Frage, wie viele Gelenke in einem Bogen angeordnet werden können, ohne dass dieser ins labile, instabile Gleichgewicht gerät. Mit Hilfe eines einfachen Experiments mit einem Bogen mit Gelenken kann man sich vergewissern, dass *das Gleichgewicht instabil wird, wenn der Bogen mehr als drei Gelenke aufweist.*

Dreigelenkbogen

Der in Bild 6.19 dargestellte Bogen mit drei Gelenken weist gegenüber einem Bogen mit nur zwei Gelenken eine Besonderheit auf: für jede Lastkonfiguration ist nur eine mögliche Lage der inneren Drucklinie möglich. Wie weiter oben mehrmals gezeigt, kann generell die Pfeilhöhe frei gewählt werden. Beim Bogen mit drei Gelenken, dem sogenannten Dreigelenkbogen, ist dagegen nur eine Pfeilhöhe möglich, welche erlaubt, dass die Drucklinie gleichzeitig durch die drei Gelenke verläuft. Aus statischer Sicht bedeutet dies, dass die inneren Kräfte im Dreigelenkbogen mit den Gleichgewichtsbedingungen allein eindeutig bestimmt werden können. Entsprechende Tragwerke werden deshalb als *statisch bestimmt* bezeichnet.

Im Bild 6.20 ist die optimale Form des Dreigelenkbogens dargestellt. Diese kann ermittelt werden aus der Drucklinie unter gleichmässig verteilten Lasten so wie aus den extremen unsymmetrischen Belastungssituationen. Die Form erinnert an das aus zwei Tragseilen bestehende Seiltragwerk der Randfelder der Tower Bridge in London (vgl. Bild 3.28) und die Tragwirkung unter einseitigen Nutzlasten ist für beide Systeme in der Tat identisch. Bei der Salginatobelbrücke von Maillart spiegelt sich dieses Verständnis von den möglichen Drucklinien in der variablen Stärke des Dreigelenkbogens wider (Bild 6.21).

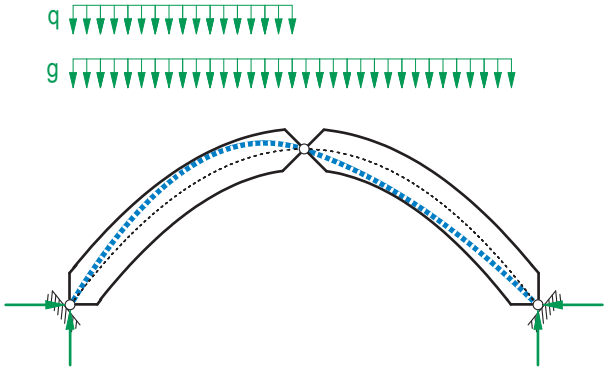


Bild 6.19: Innere Kräfte im Dreigelenkbogen

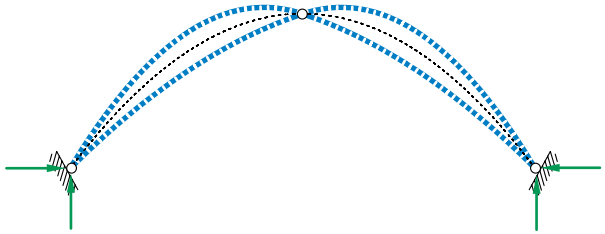


Bild 6.20: Optimiale Form eines Dreigelenkbogens unter gleichmässig verteilter Eigenlast und veränderlichen Nutzlasten



Bild 6.21: Salginatobelbrücke, bei Schiers, 1930, Arch. & Ing.: Robert Maillart

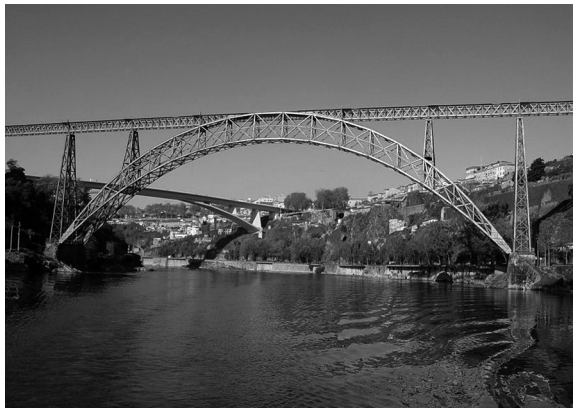


Bild 6.22: Brücke Maria Pia, Porto, 1877, Arch.: Gustave Eiffel, Ing.: Theophile Seyring

Zweigelenkbogen

Bei einem Zweigelenkbogen wie etwa der Brücke Maria Pia über den Douro (Bild 6.22) ist eine ganze *Familie von affinen Drucklinien* möglich mit den in Bild 6.23 dargestellten Extremen. Ein entsprechendes Tragwerk wird als *statisch unbestimmt* bezeichnet. Auch in einem statisch unbestimmten Tragwerk wird sich in Wirklichkeit ein einziger Spannungszustand einstellen der eindeutig durch seine Pfeilhöhe definiert ist.

Zur Bestimmung der entsprechenden Drucklinie sind zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen *weitere Betrachtungen* erforderlich, welche mit dem Materialverhalten, den Verformungen und den Randbedingungen des Tragwerks zu tun haben. Die inneren Kräfte in einem statisch unbestimmten Tragwerk sind beispielsweise von den Temperaturveränderungen, von allfälligen Auflagerverschiebungen und von möglichen plastischen Materialverformungen beeinflusst. Die quantitative Untersuchung dieser Effekte sprengt den Rahmen dieses Kurses.

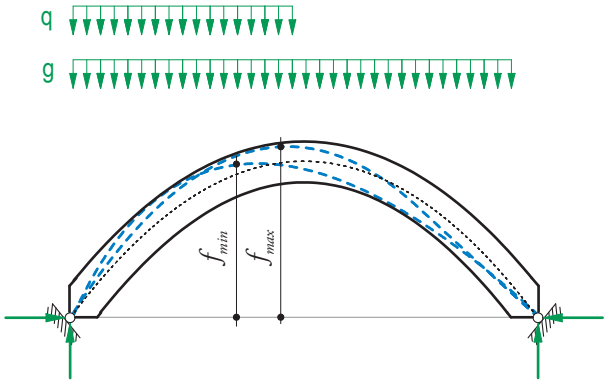


Bild 6.23: Innere Kräfte bei einem Zweigelenkbogen

In der Folge wird der Schwerpunkt auf die Tragwirkung entsprechender Tragwerke gelegt, indem vor allem extreme Druckliniengeometrien mit maximalen und minimalen Pfeilhöhen untersucht werden.

Bögen ohne Gelenke

Wird der Bogen bei den Auflagern nicht gelenkig gelagert, sondern eingespannt, so ist die *Variationsmöglichkeit der inneren Druckkraft am grössten*. In Bild 6.24 sind die zwei Extreme dargestellt:

1. Im linken Bild ist die Pfeilhöhe f_{max} maximal und gleichzeitig die Spannweite l_{min} minimal.
2. Im rechten Bild ist die effektive Pfeilhöhe f_{min} minimal und gleichzeitig die effektive Spannweite l_{max} maximal.

Im Sinne der Plastizitätstheorie kann die Drucklinie für die Bemessung frei gewählt werden. Wie weiter oben angedeutet, ist die sich in Wirklichkeit einstellende Drucklinie im Bogen abhängig von verschiedenen nur unzureichend bekannten Faktoren.

So führt zum Beispiel eine Verschiebung der Auflager zu einer Veränderung der Drucklinie und somit auch zu einer Veränderung der horizontalen Beanspruchung im

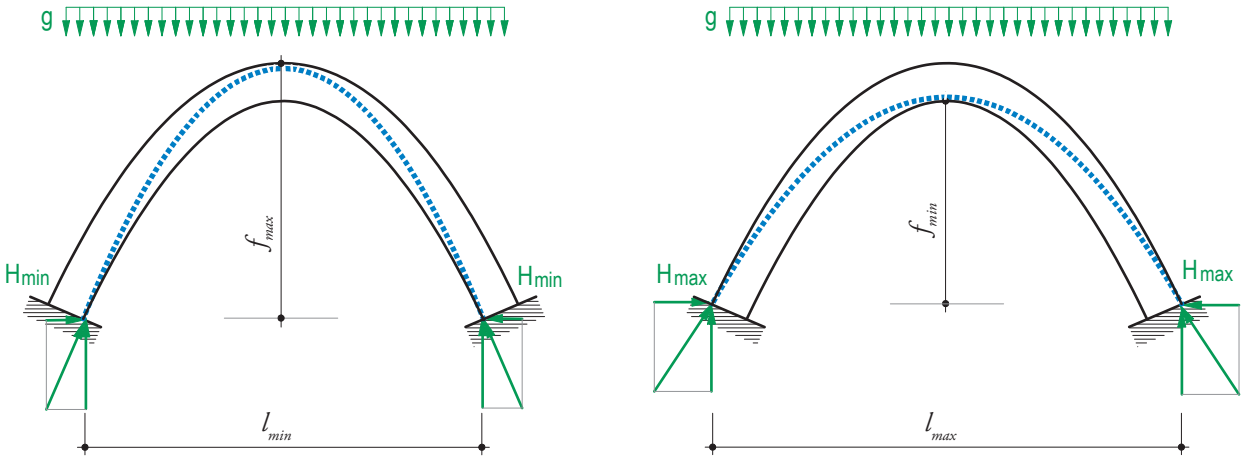


Bild 6.24: Extreme Situation in einem Bogen ohne Gelenke unter gleichmässig verteilter Last

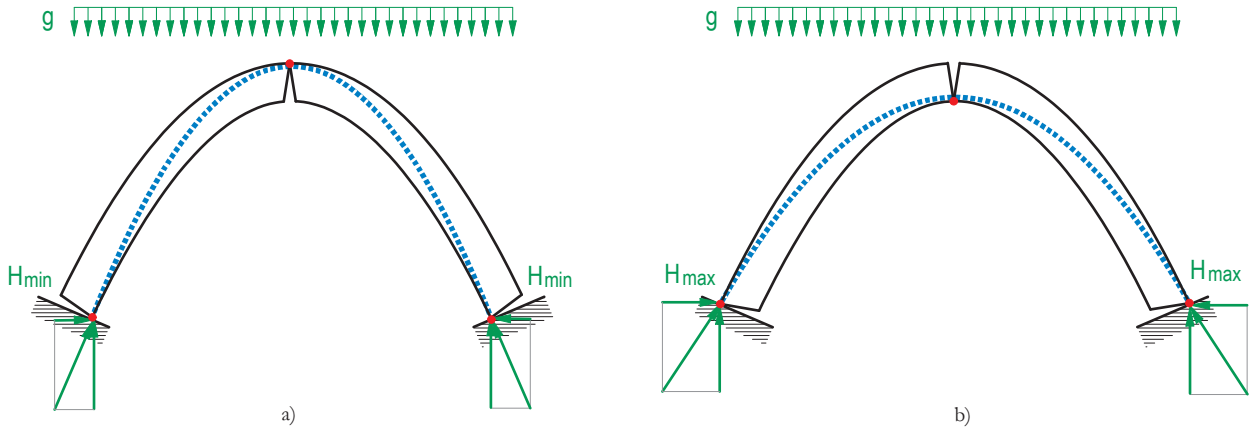


Bild 6.25: Bildung von Gelenken infolge Rissbildung durch Auseinanderschieben (a) oder Zusammenrücken (b) der Auflager

Bogen. Entfernen sich die beiden Auflager voneinander (Bild 6.25), so resultiert eine Abnahme der horizontalen Bogenbeanspruchungen.

Wenn, infolge dieser Verschiebung, die untere Grenze mit der minimalen Pfeilhöhe und der maximalen Spannweite der Drucklinie erreicht wird, so entstehen bei einer weiteren Verschiebung der Auflager Risse im Bogen. Wird der Abstand zwischen den Auflagern weiter vergrössert, so öffnen sich diese Risse und der Bereich verhält sich wie ein Gelenk. Die Wirkungslinie der Bogenbeanspruchung liegt in der Nähe des Querschnittsrandes.

Beim Erreichen dieser Grenze entsteht, infolge der Bildung von Rissen, ein Dreigelenkbogen, bei welchem die Lage der Wirkungslinie und die Intensität der horizontalen Bogenbeanspruchung nur noch von der Systemgeometrie und von der Belastung abhängen (statisch bestimmtes System).

6.8 Kreisförmige Mauerwerksbögen

In der Antike wurden Mauerwerksbögen häufig kreisförmig ausgebildet, was eine beträchtliche Abweichung der geometrischen Form des Bogens von der Drucklinie unter ständigen Lasten zur Folge hat. Zur Gewährleistung, dass die Wirkungslinie der Beanspruchungen trotzdem innerhalb des Bogens bleibt, muss dieser mit einer *genügenden Breite* entworfen werden (Bild 6.27a).



Bild 6.26: Pont du Gard, Nimes, 1.Jhd. n. Chr..

Unter der Annahme, dass die Lasten gleichmässig verteilt sind, muss die Breite des Bogens, rechtwinklig zur Bogenachse gemessen, aus geometrischen Gründen mindestens $h = 0.155 \cdot r$ betragen. Zu diesem Wert muss noch die notwendige Zone mit $b = D_d / 2 \cdot r \cdot f_{cd}$ zur Aufnahme der Beanspruchung und die Reserve für die Verschiebung der Drucklinie unter den veränderlichen Lasten ergänzt werden.

In Wirklichkeit erreicht die Breite dieser Bögen auch bei den sehr massiven historischen Bauten diesen Minimalwert nicht. Sobald sich die Wirkungslinie der inneren Beanspruchung dem Querschnittsrand nähert, entstehen breite Risse, und die einzelnen Bogenteile können gegenüber den anderen rotieren als ob Gelenke

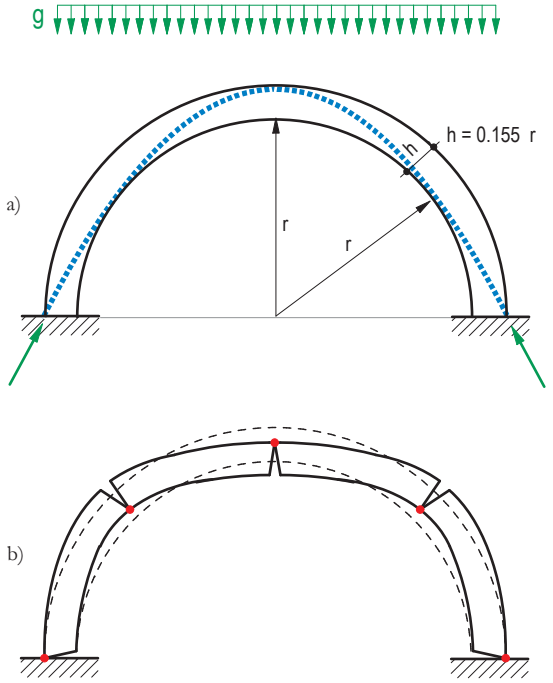


Bild 6.27: Tragwirkung (a) und Versagensmechanismus (b) von Kreisbögen

vorhanden wären. Wie im Bild 6.27b gezeigt, entstehen bei diesem System, im Gegensatz zum zuvor behandelten Fall, fünf Gelenke und das System wird instabil. In der Tat werden die vier Bogenteile frei rotieren und die Bogenform sich immer stärker von derjenigen der optimalen Drucklinie entfernen.

Bei sorgfältiger Beobachtung der historischen Bögen wird klar, dass solche Bewegungen durch die *Aufständerungswände* verhindert werden. Diese Wände werden durch die Verformungen des Bogens horizontal überdrückt (Bild 6.28). Umgekehrt üben diese Wände somit einen seitlichen Druck auf den Bogen aus, welcher die Drucklinie so anzupassen vermag, dass die Wirkungslinie der Beanspruchungen ins Innere des Bogenmaterials zurückgeschoben wird.

Das Aufständerungsmauerwerk hat somit eine fundamentale Tragwerksfunktion, und sein Ausbau kann zum Einsturz des Bogens führen! Die Aquäduktbrücke Pont du Gard bei Nimes ist eines der berühmten römischen Bauwerke, bei welchem die statische Funktion des Aufständerungsmauerwerks gut erkennbar ist (Bild 6.26). Diese Konstruktionsart wurde häufig angewendet bei Bögen aus Mauerwerk, sowohl für Brücken und Aquädukte, als auch bei Stürzen von Hochbauten, wo das Aufständerungsmauerwerk Bestandteil der Fassade ist, wie beispielsweise beim Palazzo Ducale in Urbino (Bild 6.29).



Bild 6.29: Palazzo Ducale, Urbino, 1444-1472, Arch.: Luciano Laurana

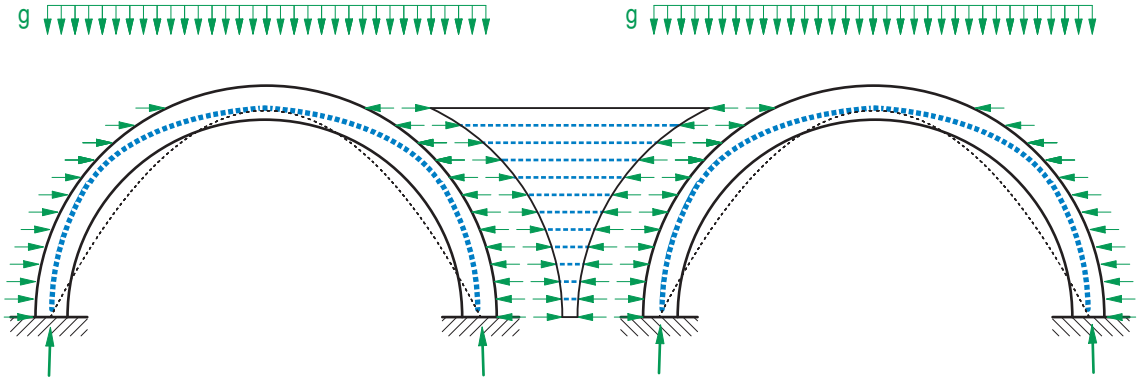


Bild 6.28:Drucklinie mit (blau) und ohne (schwarz) Mitwirkung der Aufständerungsmauerwerk

7 Räumliche Bogentragwerke

Falls Bögen räumlich angeordnet werden und zusätzlich, wie beim Übergang von den Seiltragwerken zu den Membranen, die Distanz zwischen benachbarten Tragelementen dabei immer kleiner wird, dann entstehen *mehrere Familien von klassischen Tragwerken* mit zum Teil weit zurückreichender baugeschichtlicher Tradition. Dies sind die so genannten *Gewölbe*, *Kuppeln* und *Schalen*, welche als Bogentragwerke weitgehend nur innere Druckkräfte aufweisen und deshalb in der Antike sehr erfolgreich in Naturstein-Mauerwerk erstellt werden konnten. Die Tragsicherheit, die Gebrauchstauglichkeit und insbesondere auch die Dauerhaftigkeit dieser sehr interessanten Bauwerke sind so hervorragend, dass sie zum Teil mehrere Jahrtausende überlebt haben.



Bild 7.1: Gallerie Vittorio Emanuele, Mailand, 1865-77, Arch.: Giuseppe Mengoni

7.1 Tonnengewölbe

Bei der Verwendung von Bögen zur Überdachung einer Fläche wie etwa der Galleria Vittorio Emanuele in Mailand (Bild 7.1) werden diese konventionell parallel nebeneinander angeordnet und durch ein quer zu den Bögen verlaufendes Sekundärtragwerk, bestehend aus horizontalen Balken, ergänzt. Diese übertragen die gleichmässig verteilten Dachlasten auf die Bögen, deren Tragwirkung weitgehend derjenigen der im vorherigen Kapitel behandelten Einzelbögen entspricht (Bild 7.2a).

Wenn die Bögen so nahe aneinander angeordnet werden, dass sie sich berühren und dadurch das Sekundärtragwerk überflüssig wird, entsteht ein *Tonnengewölbe* (Bild 7.2b). Die Auflager, welche sowohl Kräfte in vertikaler als auch in horizontaler Richtung aufzunehmen haben, müssen linienförmig über die gesamte Tonnengewölbelänge ausgebildet werden. Die Hauptkrümmungsrichtungen eines Tonnengewölbes ergeben sich aus den parallel angeordneten Bögen und den dazu



Bild 7.3: Taq-e Kisra Palast, Seleukia-Ktesiphon, um 550

rechtwinklig angeordneten Geraden der horizontalen Balken. Tonnengewölbe sind daher entwickelbare Flächen und können somit mittels einem Blatt Papier einfach nachgebildet werden.

Das im Bild 7.3 dargestellte Gewölbe des sassanidischen Palastes Taq-e Kisra bei Bagdad hat eine ausreichende Stärke zur Gewährleistung der Stabilität unter veränderlichen Lasten infolge Wind und nicht zu starkem Erd-

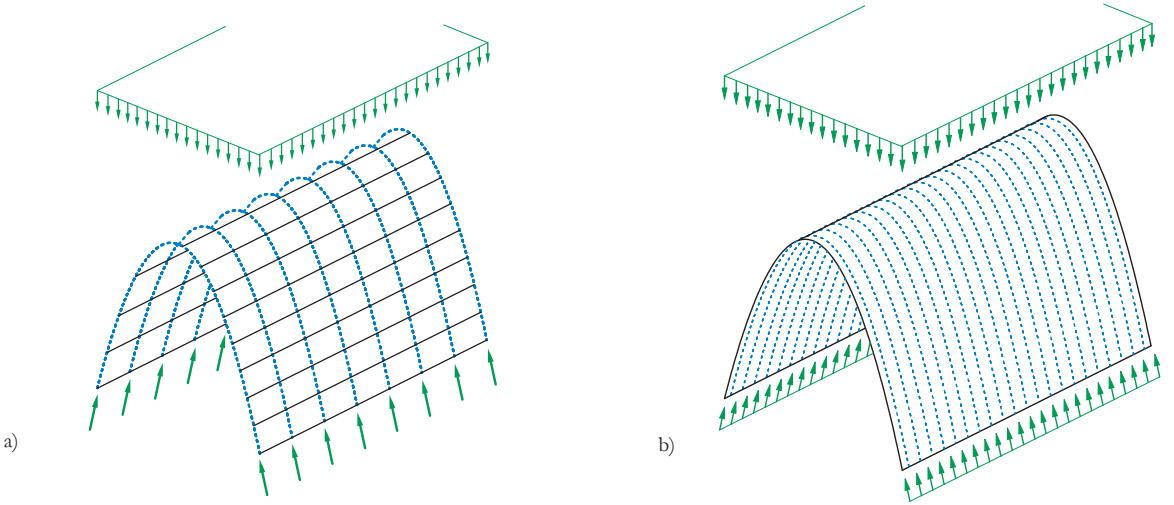


Bild 7.2: Tragwirkung einer Folge von diskreten Bögen mit Sekundärtragwerk (a) und einem Tonnengewölbe (b)

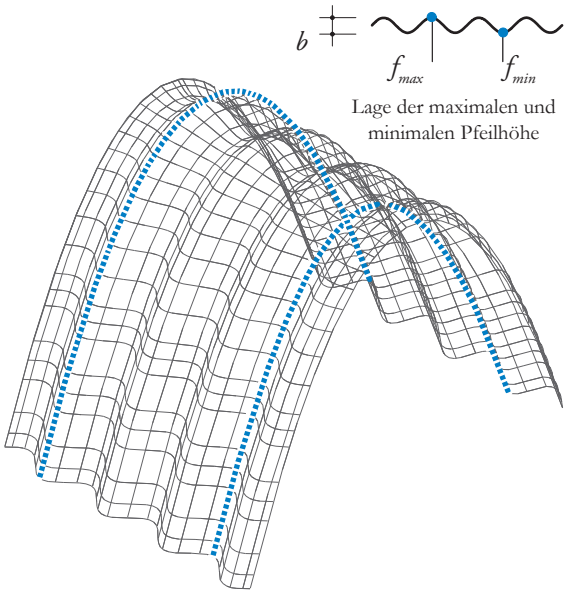


Bild 7.4: Tonnengewölbe mit variabler Pfeilhöhe *f* durch gewellte Oberfläche



Bild 7.5: Silo, Vergara, 1974, Arch. & Ing.: Eladio Dieste

beben. Der fehlende Teil ist infolge eines heftigen Erdbebens zerstört worden. Es ist bemerkenswert, wie gut die Form mit derjenigen der Drucklinie infolge ständiger Lasten übereinstimmt. Im Bereich der Auflager, wo die Bögen praktisch vertikal verlaufen, hat die Wand eine beträchtliche Stärke, so dass die Wirkungslinie der inneren Druckkräfte leicht geneigt verlaufen kann (vg. Abschnitt 6.6). Dies ist nicht das Resultat einer rechnerischen Analyse, deren Grundlagen erst mehr als ein Jahrtausend nach Fertigstellung des Bauwerks entwickelt wurden, sondern vielmehr eines tiefgehenden empirischen Wissens und einer umfangreichen bautechnischen Erfahrung.

Die Anwendung moderner Materialien, wie zum Beispiel Stahlbeton, armiertes Mauerwerk, Stahlblech oder Verbundwerkstoffe ermöglicht es, stabile *Gewölbe mit gewellten Oberflächen* zu bauen (Bild 7.5). Auf diese Art kann die Stärke auf wenige Zentimeter beschränkt werden, was eine beträchtliche Materialeinsparung zur Folge hat. Die Tragwirkung ist jedoch identisch mit derjenigen der Bögen, bei welchen die *Stabilität durch Erhöhung der Bogenbreite* erzielt wurde. Bei dieser Art von Gewölben entspricht die effektive Breite *b* nicht der Materialstärke, sondern der Weite der Wellung.

Die Wirkungslinie der inneren Kräfte kann sich in der Tat auf der gekrümmten Oberfläche so verschieben, dass sie der idealen Drucklinie entspricht. Im Bild 7.4 sind zwei Extreme dargestellt: einmal verlaufen die Drucklinien in den Rinnen und einmal auf den Graten, was der minimalen Pfeilhöhe f_{min} und der maximalen Pfeilhöhe f_{max} entspricht. Unter einseitigen Nutzlasten kann die Drucklinie unter den Lasten tendenziell im Bereich der Grate und auf der nicht belasteten Gewölbeseite tendenziell im Bereich der Rinnen verlaufen. So kann sich die Drucklinie optimal an die veränderlichen Lasten anpassen.

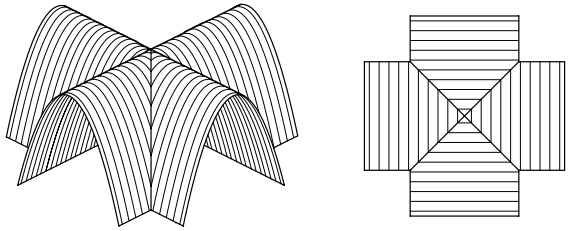


Bild 7.6: Geometrische Konstruktion eines Kreuzgewölbes

7.2 Kreuzgewölbe

Werden zwei Tonnengewölbe mit gleicher Bogengeometrie rechtwinklig zueinander angeordnet und das Material unterhalb ihrer Überschneidungskurven entfernt, so resultiert eine Fläche, welche als *Kreuzgewölbe* bezeichnet wird (Bild 7.6).

Im quadratischen Überlappungsbereich sind vier Bestandteile von Tonnengewölben vorhanden, welche sich an *vier Kanten* berühren. Unterhalb dieser Kanten fehlt das Material. Jeweils zwei Gewölbe stützen sich auf die gemeinsame Kante ab, wodurch sich zwei im Grundriss diagonal angeordnete Bögen bilden. Diese Bögen sind in jedem Punkt durch zwei Kräfte aus den angrenzenden Gewölbeteilen belastet, deren Resultierende in der Ebene der diagonalen Bögen liegt und somit in diese eingeleitet werden kann (Bild 7.7). Das so entwickelte Kreuzgewölbe kann die Lasten, im Gegensatz zum Tonnengewölbe, in nur *vier Punkten* in das Erdreich abgeben.

Im Allgemeinen sind Kreuzgewölbe viel stabiler als Tonnengewölbe. Der Grund hierfür ist die Tatsache, dass sich die zwei Elemente, die das Gewölbe bilden, gegenseitig stabilisieren können. Jedes Element nimmt die gleiche Funktion wie die Aufständerungswände bei den kreisförmigen Bögen wahr (vgl. Abschnitt 6.8).

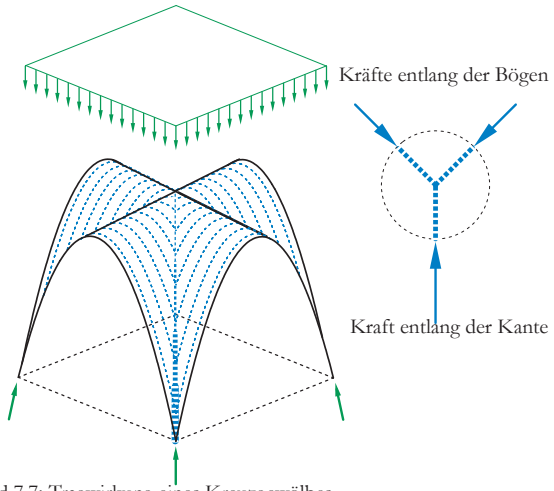


Bild 7.7: Tragwirkung eines Kreuzgewölbes

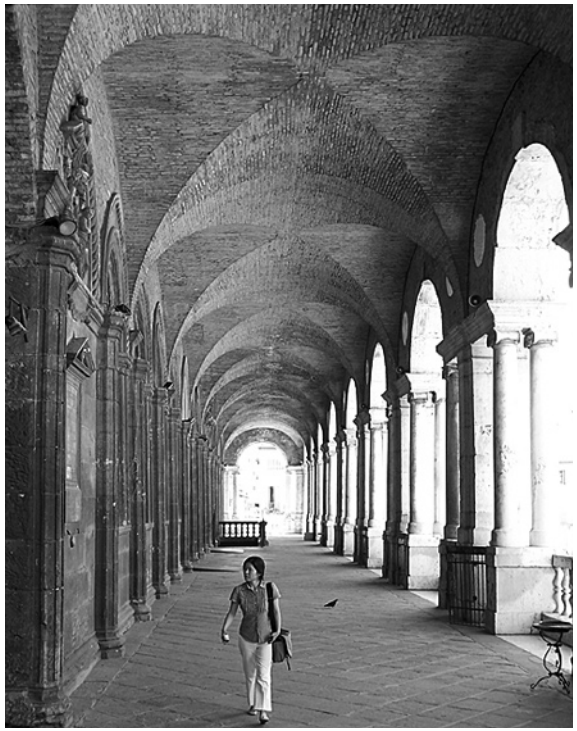


Bild 7.8: Arkaden des Palazzo della Ragione, Vicenza, 1546-1549, Arch.: Andrea Palladio

Die ersten bedeutenden Anwendungen dieser Tragwerksformen gehen auf die römische Antike zurück. Das Kreuzgewölbe der Basilika von Massenzio, welches 30 n. Chr. in Beton erbaut wurde, wies eine Spannweite von gut 25 m auf. Auch das Dach des Bades der Villa Adriana in Tivoli, gegen 120 n. Chr. ebenfalls in Beton erbaut, war als Kreuzgewölbe ausgebildet. Auch in der Architektur der Renaissance wurde das Kreuzgewölbe häufig verwendet, zum Beispiel beim Entwurf von Andrea Palladio (1508-1580) für die Loggia des Palazzo della Ragione (Bild 7.8).

In der Gotik haben die Kreuzgewölbe eine beträchtliche Entwicklung erfahren. Ausser der charakteristischen Form mit dem Knick am Höchstpunkt, wurden in dieser Periode die *dreiteiligen Kreuzgewölbe* eingeführt. Ihre Geometrie mit den sechs Gewölbeelementen wird generiert durch Kreuzung von drei Tonnengewölben, deren drei Grate sich in einem Punkt schneiden. Die Überdeckung des Mittelschiffes der Kathedrale von Beauvais (Bild 7.9) veranschaulicht auf eindrucksvolle Weise diese geometrische Konstruktion. Der Chor ist gedeckt von einem Gewölbe, das nach dem gleichen Prinzip gebildet ist. Hier treffen acht Gewölbeelemente zusammen. So entsteht ein Tragwerk, welches auf einer Serie von im Grundriss kreisförmig angeordneten Pfeilern aufgelagert ist.



Bild 7.9: Chor der Kathedrale St.Pierre, Beauvais, 1247-1337

Die sichtbaren Pfeiler im Inneren sind selbstverständlich nur in der Lage, die vertikalen Komponenten der Gewölbebeanspruchungen aufzunehmen, während die horizontalen Komponenten von einer Serie von Rampenbögen aufgenommen werden, welche radial angeordnet sind (Bild 7.10). Da beim Chor der Kathedrale nicht Tonnengewölbe mit derselben Bogengeometrie verwendet wurden, besitzt das Kreuzgewölbe keine quadratische, sondern eine rechtwinklige Grundfläche. Durch diese Differenz in der Geometrie folgen die resultierende Kräfte von angrenzenden Gewölbeteilen nicht mehr wie zuvor den diagonalen Bögen, sondern verlaufen quer dazu und erzeugen dadurch Biegung in den Kanten. Auch diese Kraft kann nicht durch die sichtbaren Pfeiler alleine abgeleitet werden, sondern wird durch die ausfachenden Gewölbeelemente aufgenommen.

Eine andere Variante des Kreuzgewölbes ist im Bild 7.11 dargestellt, ein Entwurf für eine Kathedrale in



Bild 7.10: Apsis der Kathedrale St.Pierre, Beauvais, 1247-1337

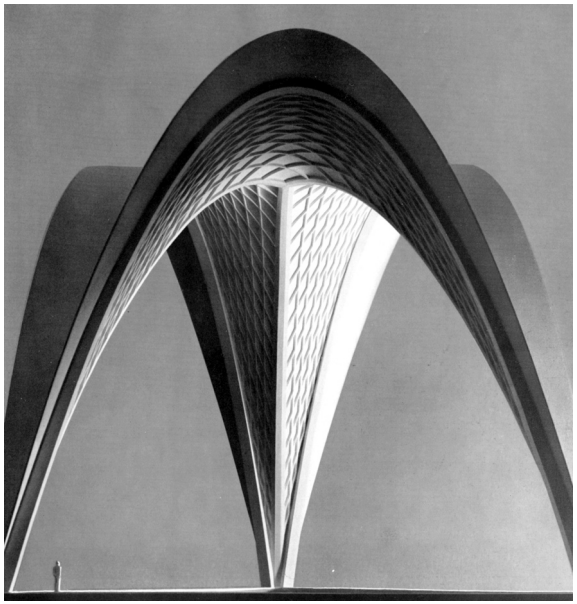


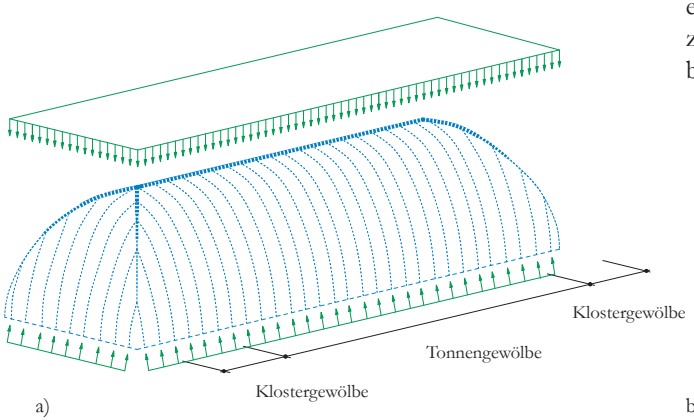
Bild 7.11: Modell für die Kathedrale von New Norcia bei Perth, 1958, Arch.: P. L. Nervi, F. Vecchini & C. Vannoni

New Norcia. Dieses Kreuzgewölbe wurde generiert durch die Kombination von drei gleichartigen Tonnengewölben. In diesem Fall ist für jedes Tonnengewölbe nur ein Element vorhanden und die resultierende Überdeckung ist im Grundriss dreiecksförmig und weist daher nur drei Auflagerpunkte und drei Grate auf.

7.3 Klostergewölbe

Diejenigen Gewölbeteile, welche bei der geometrischen Konstruktion des Kreuzgewölbes entfernt werden, ergeben eine weitere Gewölbeart, welche als *Klostergewölbe* bezeichnet wird und aus vier Elementen von Tonnengewölben und vier Graten im Bereich ihrer Überschneidung besteht (Bild 7.12a).
Die in der Hauptkrümmungsrichtung der Tonnengewölbeelemente liegenden Bogensegmente haben ihre Auflager am unteren Gewölberand, so dass wie bei den Tonnengewölben, im Gegensatz zu den Kreuzgewölben, die Auflagerung kontinuierlich über den gesamten Umfang erfolgen muss. Im oberen Bereich sind die Bögen durch die Grate unterbrochen. Die Bogenkräfte werden hier teilweise durch diejenigen der Bögen der benachbarten Flächen kompensiert und teilweise in die Grate eingeleitet (Bild 7.12b). Im Gegensatz zu den Kreuzgewölben, bei welchen die Grate durch die Bögen nach unten beansprucht werden, werden diese bei den Klostergewölben nach oben beansprucht. Ihre Beanspruchung ist null auf der Höhe der Auflager und nimmt nach oben durch die Einleitung der Bogenkräfte progressiv zu, bis die maximale Druckbeanspruchung im Scheitel erreicht wird.

Klostergewölbe können auf einfache Art mit Tonnengewölben kombiniert werden, so dass rechtwinklige Grundflächen überdeckt werden können. In diesen Fällen müssen die Druckkräfte in den Graten, welche, wie beschrieben ihr Maximum in den Scheiteln erreichen, von einem im Scheitel des Tonnengewölbes in Längsrichtung verlaufenden Druckelement aufgenommen werden (Bild 7.13a).



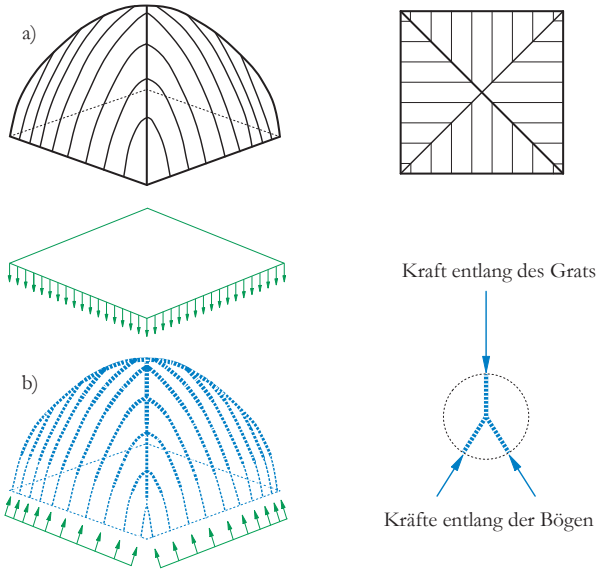


Bild 7.12: Geometrische Konstruktion (a) und Tragwirkung (b) eines Klostergewölbes

Wie die Kreuzgewölbe können auch die Klostergewölbe durch die Überschneidung von einer beliebigen Anzahl von Tonnengewölben zusammengesetzt werden. Auf diese Art entstehen Klostergewölbe, deren Umfang aus einem regelmässigen Polygon mit einer beliebigen Anzahl von Seiten besteht, zum Beispiel ein Klostergewölbe mit einem achteckigen Grundriss (Bild 7.13b).

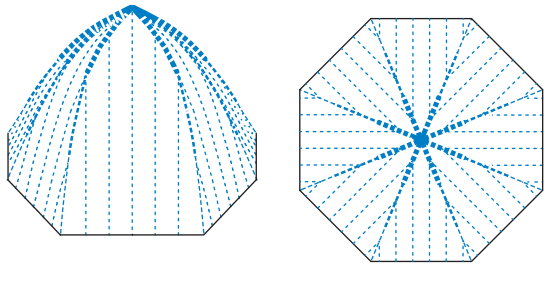


Bild 7.13: Variationen: Kombination von Kloster- und Tonnengewölbe (a) und Klostergewölbe mit achteckigem Grundriss (b)

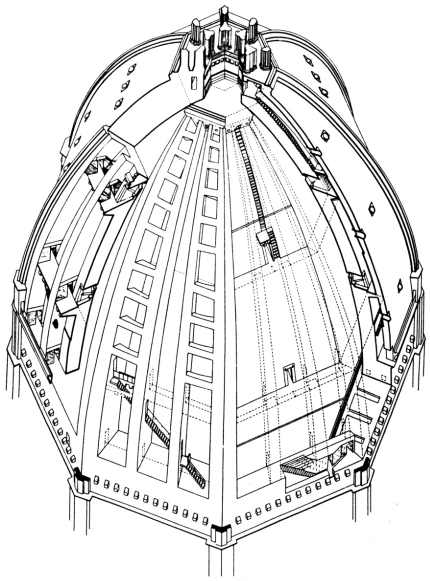
Die „Kuppel" von Santa Maria del Fiore in Florenz von Filippo Bruneleschi (1377-1446) ist das bekannteste Beispiel eines Klostergewölbes mit einem solchen achteckigen Grundriss (Bild 7.14). Das Tragwerk besteht aus zwei Gewölben aus Mauerwerk: ein äusseres, welches nur 0.58 m stark ist, und ein inneres mit einer variablen Stärke zwischen 2.40 m unten und 2.10 m oben. Die zwei Gewölbe sind durch 8 vertikal verlaufende Rippen im Bereich der Kanten, und mit weiteren 16 dazwischen liegenden und zusätzlichen horizontalen Rippen miteinander verbunden. Die Gesamtstärke des Gewölbes beträgt ca. 4 m.



Bild 7.14: „Kuppel" der Santa Maria del Fiore, Florenz, 1418-36, Arch. & Ing.: Filippo Brunelleschi

7.4 Kuppeln mit auf die äusseren Lasten abgestimmten radialen Bögen

Vom Standpunkt des Tragwerkes aus betrachtet, wird der Begriff der *Kuppel* den *Überdeckungen mit kreisförmigem und elliptischem Grundriss* vorenthalten. Ein solches Tragwerk kann verstanden werden als ein Klostergewölbe, das aus einer unendlichen Zahl von Oberflächen und Graten besteht. Die Breite der Oberflächen wird dann infinitesimal klein, so dass die tragenden Elemente zu einer unendlichen Serie von radial angeordneten Bögen streben. Kuppeln sind also Rotationsflächen mit *Radialbögen* als erzeugende Linie und kreisförmigen oder elliptischen *Horizontalringen*. Um die Tragwirkung von Kuppeln besser zu veranschaulichen, können wir diese durch eine endliche Anzahl von Bögen und Ringen darstellen (Bild 7.15).



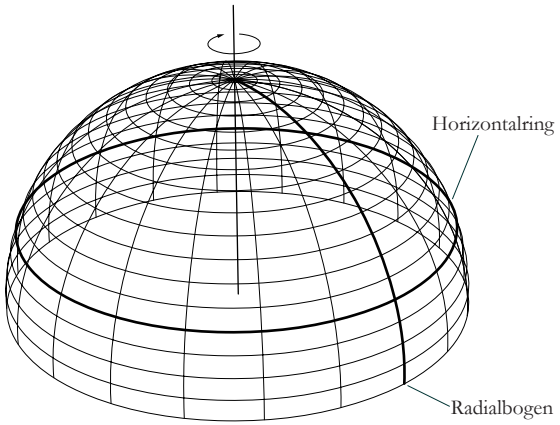


Bild 7.15: Kuppel als Rotationsfläche

Die einzelnen Bögen tragen diejenigen Lasten ab, welche auf ihre Oberfläche wirken. Die Intensität der in diesen Bögen wirkenden inneren Kräfte kann einfach mit Hilfe der graphischen Statik ermittelt werden. Zur Ermittlung der Beanspruchung des Materials, d.h. der Druckspannung oder der Kraft pro Oberflächeneinheit, wird die innere Druckkraft dividiert durch die Querschnittsfläche, bestehend aus dem Abstand zweier benachbarter Bögen multipliziert mit der Stärke der Kuppel (vgl. Kapitel 5).

Die Querschnittsfläche nimmt nach oben hin ab, und strebt im Bereich der Rotationsachse, d.h. auf dem Scheitel der Kuppel, gegen null. Das bedeutet, dass die Spannung im Material gegen unendlich strebt. Ein



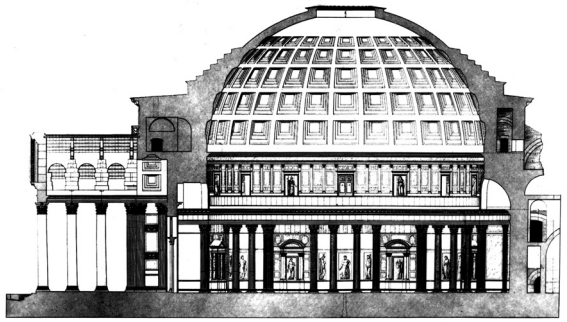


Bild 7.16: Kuppel des Pantheons, Rom, 118-125

solcher Zustand ist natürlich physikalisch unmöglich, weil kein Material eine entsprechende Beanspruchung aufzunehmen vermag. Die Lasten können somit im Bereich des Scheitels nicht nur von den Radialbögen aufgenommen werden, sondern werden in die Horizontalringe abgeleitet, auf welche sich die Bögen im oberen Kuppelbereich abstützen können (Bild 7.17a).

Wie das mit Hilfe eines Kräftedreiecks dargestellte Gleichgewicht zeigt, können die inneren Kräfte der Bögen progressiv in die Ringe eingeleitet werden. Dank dieser Tatsache ist das Material im Scheitelbereich der

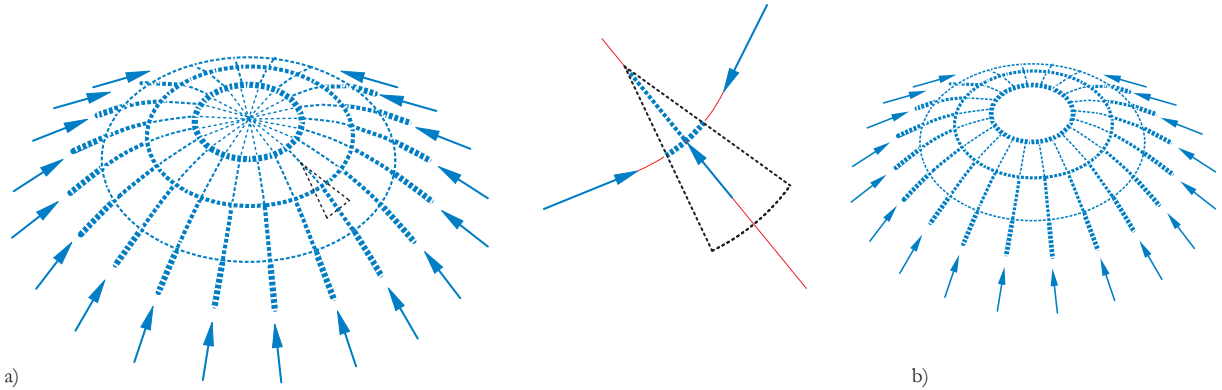
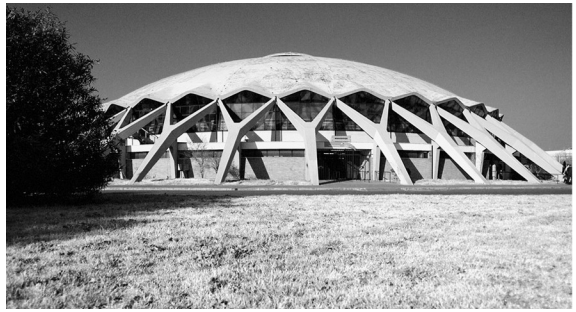


Bild 7.17: Tragwirkung einer Kuppel als Bogen- und Ringtragwerk (a) und mit einer Lichtöffnung im Scheitel (b)

Kuppel nicht zwingend notwendig. Kuppeln können daher mit grossen *Scheitelöffnungen* versehen werden (Bild 7.17b). Die Ringe im Bereich der Öffnung werden dabei selbstverständlich stärker beansprucht als diejenigen einer Kuppel ohne Öffnung.

Die Römer waren grosse Meister im Erstellen von Kuppeln. Exemplarisch hierfür steht die Kuppel des Pantheons in Rom, dessen charakteristische Öffnung im Scheitel einen Durchmesser von 9 m erreicht (Bild 7.16). Die im Inneren sichtbaren Bögen und Ringe sind, obwohl im Sinne der Statik ausgebildet, rein dekorativ. Das Tragwerk besteht in der Tat aus einer massiven Betonkuppel.

Der Palazzetto dello Sport in Rom ist eine moderne Anwendung dieser Tragwerksart (Bild 7.18). Die Kuppel besteht aus einer filigranen Schale aus Stahlbeton. Auch in diesem Fall dürfen die auf der Innenseite angeordneten Rippen nicht fehl interpretiert werden; sie dienen als Begrenzung der vorfabrizierten Elemente und zur Stabilisierung der Schale. Ausserdem stimmt im vorliegenden Fall die Richtung der Rippen nicht mit



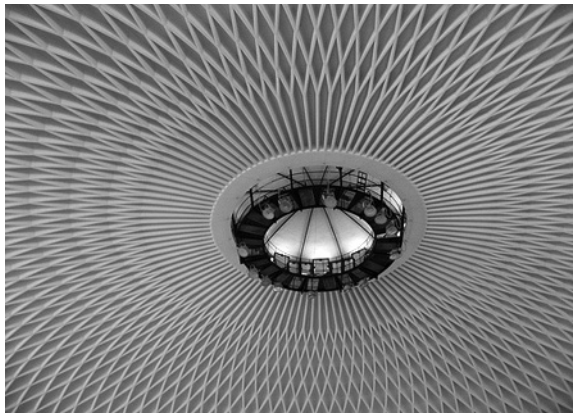


Bild 7.18: Palazzetto dello Sport, Rom, 1956-57, Arch.: Pier Luigi Nervi & Annibale Vitellozz, Ing.: Pier Luigi Nervi

derjenigen der tatsächlichen *Druckbeanspruchung in der Kuppel* überein. Am Rand der Scheitelöffnung ist der verstärkte Ring gut sichtbar. An ihrem Perimeter ist die Kuppel auf 36 Y-förmigen Stützen aufgelagert, welche radial in Richtung der Tangente der Kuppel angeordnet sind. Auf diese Art können die inneren Kräfte der Kuppel direkt in die Fundamente abgeleitet werden.

7.5 Kuppeln und weitere Tragwerke mit beliebig geformten radialen Bögen

Kugelförmige Kuppeln

Die Drucklinie eines Bogens unter gleichmässig verteilter Belastung folgt einer Parabel (vgl. Kapitel 6). Aus geometrischen Gründen ist bei Kuppeln konstanter Stärke die Eigenlast nicht gleichmässig verteilt, sondern *in Richtung des Scheitels abnehmend*. Unter diesen Bedingungen sind die radialen Drucklinien in den Radialbögen, unter Vernachlässigung der Wirkung der horizontalen Zugringe, nicht mehr parabelförmig, sondern haben die Form einer *Kurve dritten Grades*. Wie zuvor bemerkt, werden die Spannungen im Scheitelbereich unter der radialen Tragwirkung grösser als die Materialfestigkeit, so dass innere Druckringe aktiviert werden. Diese Aktivierung der Horizontalringe bewirkt eine Veränderung der Form der Drucklinien in den Radialbögen in Richtung der Form einer Parabel.

In der Antike waren Kuppeln meist kugelförmig. Die entsprechenden Drucklinien der radialen Bögen nähern sich demzufolge gefährlich dem inneren Rand und das Tragwerk hat die Tendenz, ähnlich wie bei kreisförmigen Bögen, nach aussen auszuweichen. Aus diesem Grund haben sich, sowohl bei den Mauerwerkskuppeln der Renaissance als auch bei den Betonkuppeln der Römer, grosse *radiale Risse im unteren Bereich* des Tragwerks gebildet.
Bei der in Kapitel 6 behandelten Kuppel des Petersdoms in Rom, wo die Suche nach Erklärungen für diese Risse zum ersten Mal zur Konstruktion der Drucklinien eines Bogens geführt hat, wurde eine Verstärkung der Tragstruktur mit Hilfe von horizontalen Zugringen aus Eisen vorgeschlagen (vgl. Abschnitt 6.3). Diese waren in der Lage, horizontale Kräfte auf die radialen Bögen auszuüben und so die Drucklinien gemäss Bild 7.20b ins Innere der Tragstruktur zurückzuschieben, ähnlich wie bei den kreisförmigen Bögen mit Hilfe des Aufständerungsmauerwerks (vgl. Abschnitt 6.8).

Das Beispiel der Kuppel des Petersdoms zeigt eindrücklich, wie durch eine sehr einfache konstruktive Vorkehrung eine optimale Tragwirkung erzielt werden kann, auch wenn die Form der Kuppel nicht derjenigen der Drucklinien der radialen Bögen entspricht. Das verdeutlicht, dass die *Kuppeln mit viel grösserer Freiheit entworfen* werden können als die Bögen. Wenn die Krümmung der radialen Bögen grösser ist als diejenige der idealen Drucklinie, besteht in einer Kuppel aus zugfestem Material die Möglichkeit der Ausbildung von Zugringen. Falls die Zugfestigkeit des Materials ungenü-

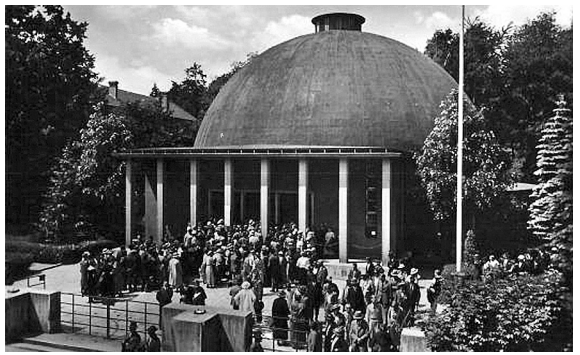


Bild 7.20: Planetarium, Jena, 1926, Arch.: Johannes Schreiter & Hans Schlag, Ing.: Franz Dischinger & Walter Bauersfeld

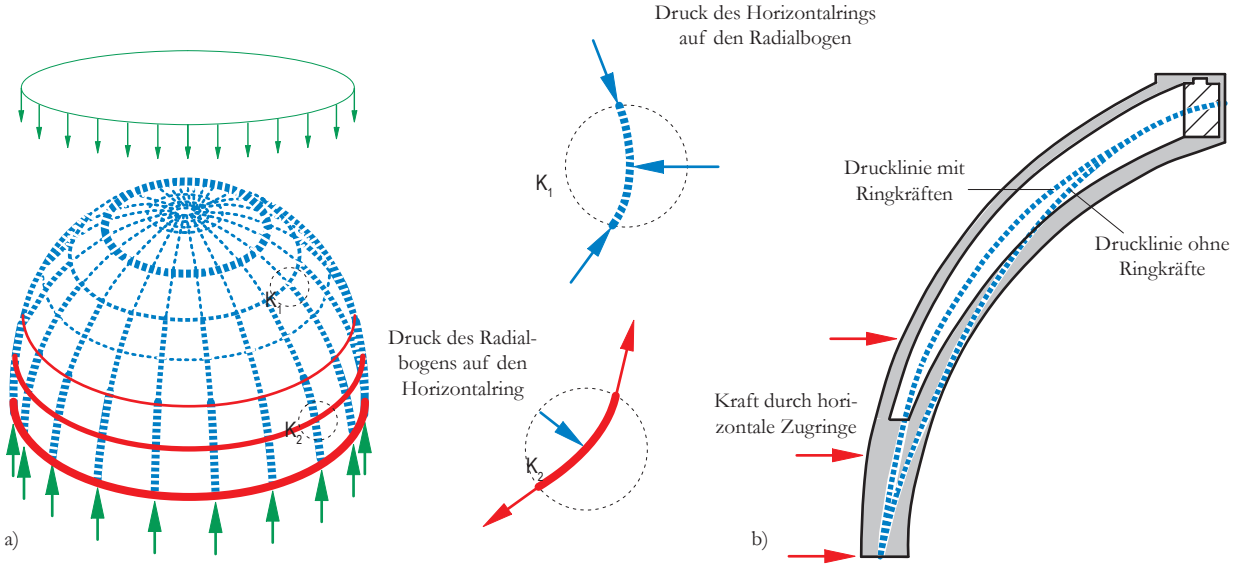


Bild 7.19: Tragwirkung einer kugelförmigen Kuppel mit Zugringen (a) und Drucklinie mit und ohne Verstärkungsringe (b)

gend ist, muss eine Zugbewehrung vorgesehen werden. Ein eindrückliches Beispiel hierfür ist das Planetarium in Jena (Bild 7.20) mit seiner halbsphärischen Kuppel aus Stahlbeton mit einem Durchmesser von 25 Metern und einer Stärke von nur 6 Zentimetern!

Wie das Beispiel der Kuppel des Petersdoms zeigt, gibt es eine enge Beziehung zwischen der Geometrie des Radialbogens und den inneren Kräften in den Horizontalringen. Dieser Zusammenhang wird durch das *Krümmungsverhalten* der radialen Bögen der Kuppel und der Wirkungslinie der auf die Kuppel wirkenden Kräfte beschrieben. Generell gilt, dass durch die Krümmung auf einer beliebigen infinitesimalen Strecke eines Bogens eine Umlenkkraft U erzeugt wird (Bild 7.21). Diese Umlenkkraft kann verstanden werden als diejenige Kraft, welche benötigt wird, um die Richtungsänderung der Kraft im Bogen vorzunehmen. Die Drucklinie einer auf einem Radialbogen wirkenden äusseren Last ist deshalb nur dann deckungsgleich mit der Bogenachse, wenn die Umlenkkraft U mit der rechtwinklig zur Bogenachse gerichteten Komponente der äusseren Last im Gleichgewicht ist. Wenn jedoch die Krümmung der Bogenachse zu stark oder zu schwach ist, so ist das beschriebene Gleichgewicht verletzt und die Drucklinie folgt nicht mehr der Bogenachse, sondern verläuft auf der Aussenseite (Bild 7.21a) bzw. auf der Innenseite des Bogens (Bild 7.21b). Der Verlauf der Drucklinie kann in diesem Fall mit Hilfe einer in horizontaler Richtung wirkenden Kraft H beeinflusst werden. Sowohl die vertikal wirkende äussere Last als auch die zusätzliche Horizontalkraft können in je eine Komponente Q_U bzw. H_U, welche in Richtung der Umlenkkraft wirken, und in je eine Komponente Q_T bzw. H_T, welche in Richtung der Bogentangente wirken, zerlegt werden. Es ist somit stets möglich, die Kraft H so festzulegen, dass die beiden Komponenten Q_U und H_U exakt mit der Umlenkkraft U im Gleichgewicht sind, was bedeutet, dass die Drucklinie der äusseren Last und der Horizontalkraft auf der Bogenachse liegt. Die Kraft H kann durch die Horizontalringe aufgebracht werden. Ist die Krümmung $\varkappa_R$ im Radialbogen kleiner als die Krümmung

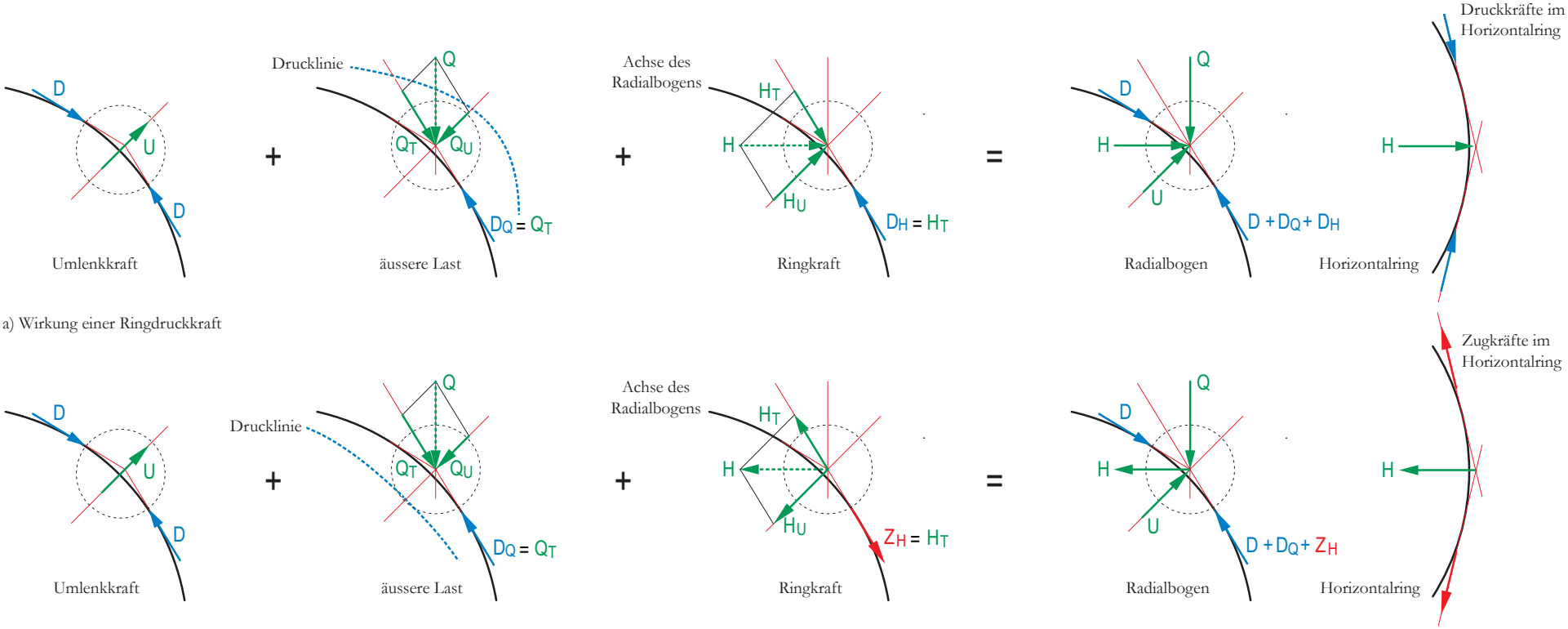


Bild 7.21: Beziehung zwischen der Krümmung der Wirkungslinie von Lasten und den inneren Kräften in den Horizontalringen einer Rotationsfläche

$\varkappa_D$ der Drucklinie unter äusseren Lasten, so entstehen Druckkräfte in den Horizontalringen (Bild 7.21a). Ist die Krümmung $\varkappa_R$ im Radialbogen dagegen grösser als die Krümmung $\varkappa_D$ der Drucklinie im Radialbogen, so entstehen Zugkräfte in den Horizontalringen (Bild 7.21b).

Durch dieses Kriterium lässt sich leicht eine *qualitative Aussage über die Art der inneren Kräfte in den Horizontalringen* von Kuppeln machen. In Bild 7.22 sind die Krümmung entlang des Ringbogens und der Drucklinie für den Fall einer kugelförmigen Kuppel unter Eigenlast dargestellt. Die Drucklinie entspricht also einer Kurve dritter Ordnung. Wie das Bild zeigt, besitzt diese Kurve im Bereich des Scheitels eine grössere Krümmung als der Kreis, der eine konstante Krümmung aufweist. Im Scheitelbereich stehen die Horizontalringe daher unter Druck. Im Gegensatz dazu stehen die Horizontalringe im Bereich des Auflagers unter Zug, da die Krümmung der Parabel zum Rand hin immer mehr abnimmt. Diese Ergebnisse entsprechen Polenis Analyse der statischen Probleme des Petersdoms und machen deutlich, dass aus der Untersuchung des Krümmungsverhaltens der Radialbögen und der Wirkungslinien der Lasten Aussagen über das Verhalten von Tragwerken gewonnen

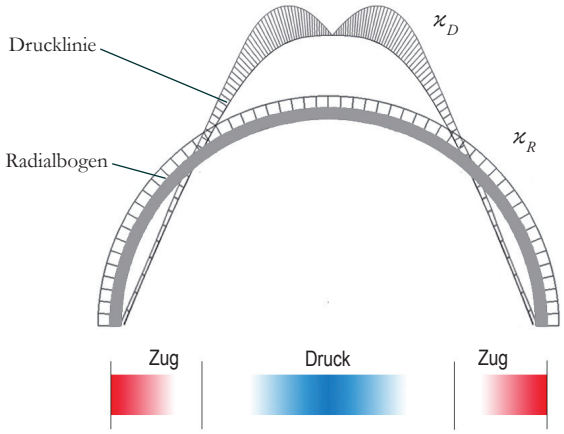


Bild 7.22: Krümmungsverhalten und resultierender Zug und Druck in einer kugelförmigen Kuppel unter Eigenlast



Bild 7.23: Taj Mahal, bei Agra, 1631-48, Arch.: Abu Fazel

werden können.

Zwiebeldächer

Die Kuppeln der orthodoxen, islamischen und hinduistischen Kulturen weichen häufig stark von der idealen, durch die Drucklinie gegebene, Form ab (Bild 7.23). Wie im Beipiel zuvor ist die Krümmung der Radialbögen im Auflagerbereich grösser als die Krümmung der Drucklinie und daher wird die Tragsicherheit einzig ermöglicht durch die Aktivierung von stark auf Zug beanspruchten Ringen im unteren Bereich der Kuppeln. Oft ist jedoch bei Zwiebeldächern die Form der inneren Tragstruktur nicht identisch mit der äusserlich sichtbaren, so dass die Abweichung der Form von der optimalen Drucklinie nicht immer so ausgeprägt ist wie es auf den ersten Blick scheint.

Kegeldächer

Wenn die Krümmung der radialen Bögen dagegen kleiner ist als diejenige der Drucklinie der Lasten, müssen sich, wie gezeigt, in den Horizontalringen der Kuppel horizontale Druckringe ausbilden. Die *kegelförmigen Kuppeln* stellen in diesem Sinne einen Spezialfall dar, denn die Radialbögen des Kegels sind Geraden und die Krümmung der radialen Bögen ist somit null. Für die Umlenkkraft gilt somit $U = 0$ und daher folgt aus Bild 7.21, dass Q_U mit H_U im Gleichgewicht ist. Die Umlenkung muss also vollständig von den Horizontalringen durchgeführt werden.

Da die Radialbögen Geraden sind, nimmt die Eigenlast bei gleichbleibender Kuppelstärke linear zum Scheitel hin ab. Die Drucklinie ist also eine Kurve dritten Grades (Bild 7.24). In jedem Punkt des Radialbogens erzeugt die Last eine Tangentialkraft Q_T (Bild 7.21). Diese muss im weiteren Verlauf des Radialbogens nicht mehr umgeleitet werden, da der Bogen eine Gerade ist. Diese Kräfte weisen daher einen kontinuierlichen Zuwachs im Bogen auf. Die innere Druckkraft in Richtung der Radialbögen nimmt also von oben nach unten progressiv zu.

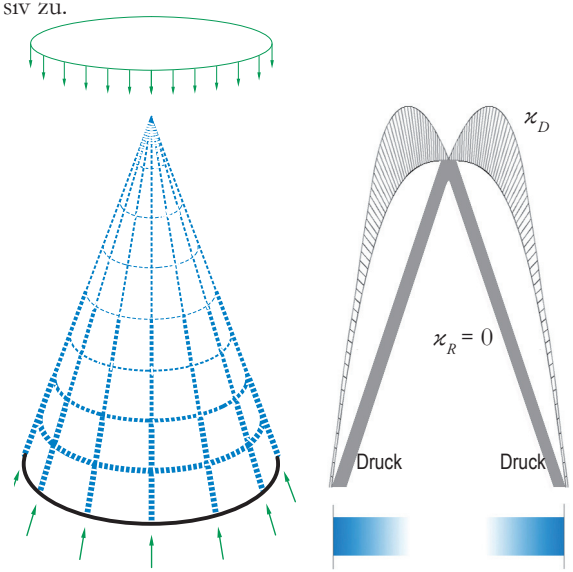


Bild 7.24: Tragwirkung eines Kegeldaches unter Eigenlast

Die Ausbildung einer Aussparung im oberen Bereich des Kegels bewirkt lediglich eine Reduktion der inneren Beanspruchung in den radialen Geraden. Die beschriebene Tragweise bleibt dagegen unverändert und ein Kegeldach kann, wie zuvor bei den Kuppeln, im Scheitel geöffnet werden (Bild 7.25).

Rotationshyperboloide

Das Tragverhalten der *Rotationshyperboloide* (Bild 7.26) unter Eigenlasten folgt dem gleichen Prinzip wie oben beschrieben. Im unteren Bereich ist das Tragverhalten analog zu demjenigen des Kegels. Im oberen Bereich ist die Neigung umgekehrt und die Tragwirkung entspricht derjenigen eines Kegels mit nach unten gerichteter Spitze. Die Zunahme der Druckkraft in Richtung der radialen Bögen hat hier eine nach aussen gerichtete Komponente, so dass die Horizontalringe auf Zug beansprucht werden (Bild 7.27). Im Gegensatz zu den bisherigen Beispielen sind beim Rotationshyperboloid die Randbögen und die Drucklinie umgekehrt gekrümmt. Für die Krümmung gilt also $\varkappa_R < 0 < \varkappa_D$ im unteren Bereich und $\varkappa_D < 0 < \varkappa_R$ im oberen. Hierdurch verstärken sich die Normalkräfte Q_U und H_U gegenseitig, d.h. die resultierenden Zug- respektive Druckkräfte in den Horizontalbögen sind grösser als in einer vergleichbaren gleichseitig gekrümmten Situation. Bei hohen Tragwerken, wie beispielsweise Rotationshyperboloiden oder Kegeln, sind häufig nicht die Eigenlasten, sondern die *Wind-* bzw. die *Erdbebenkräfte* massgebend für die Bemessung. In diesem Fall ist die Analyse der Tragwirkung komplizierter, weil die Lasten nicht mehr symmetrisch sind. Es resultieren dann innere Kräfte, deren Richtungen nicht mehr mit den radialen Bögen und den horizontalen Ringen übereinstimmen. Im Fall von Kuppeln aus Mauerwerk oder aus Beton kann die Tragwirkung jedoch immer noch mit einer Serie von auf Druck beanspruchten Bögen und auf Zug beanspruchten Seilen beschrieben werden, deren Richtung auf der Tragwerksfläche sich in Abhängigkeit der vertikalen zur horizontalen Belastung verändern kann.



Bild 7.25: Bundeskunsthalle, Bonn, 1989-92, Arch.: Gustav Peichl, Ing.: Polonyi und Fink

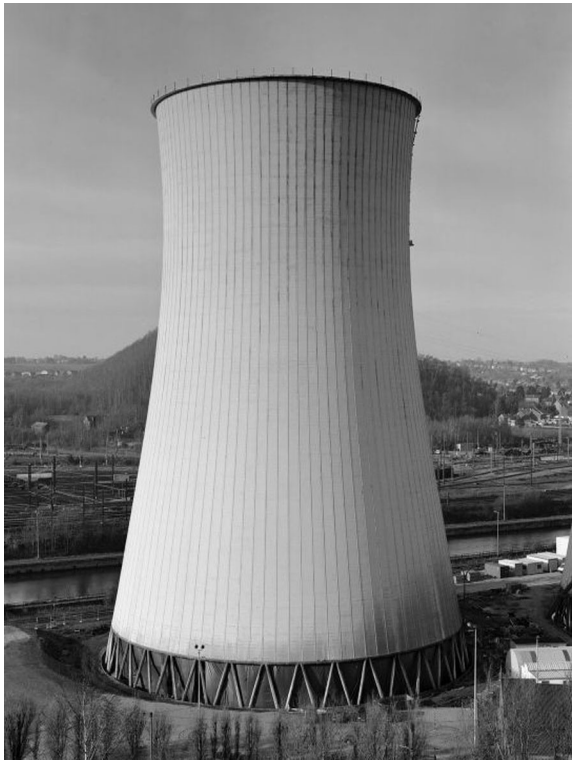


Bild 7.26: Kühlturm bei Charleroi

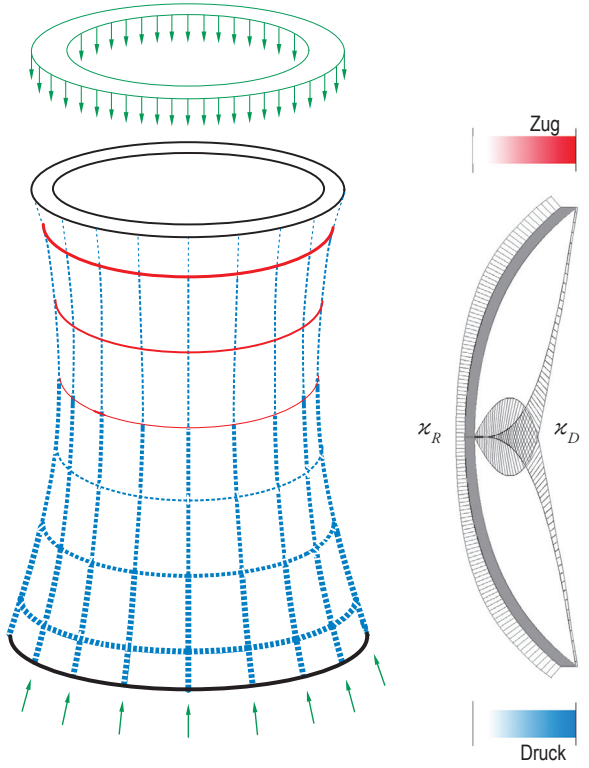


Bild 7.27: Tragwirkung eines Rotationshyperboloids unter Eigenlast

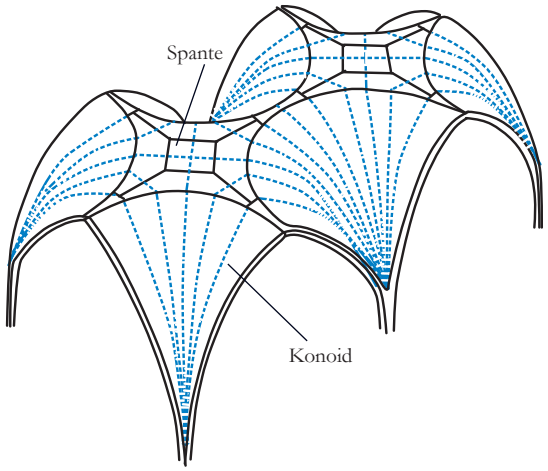


Bild 7.28: Fächergewölbe

7.6 Fächergewölbe

In England fand im 14. Jahrhundert eine Weiterentwicklung der Kreuzgewölbe statt. Dabei wurden die Gewölbeelemente und die Grate in ein kontinuierliches Tragelement integriert (Bild 7.28). Erreicht wurde dies durch die Rotation eines Bogens um eine Achse. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Kuppeln krümmt sich die erzeugende Linie dabei jedoch weg von der Rotationsachse. Die resultierenden, trichterförmigen geometrischen Elemente werden daher auch als *Konoide* (Cone = Kegel) bezeichnet.

Fächergewölbe sind häufig aus mehreren Konoiden gebildet, welche einer neben dem anderen angeordnet sind. Ihre Schnittkurven sind als Längs- und Quergrate sichtbar, und im oberen Scheitelbereich ist ein formal fremdartiges horizontales Element ausgebildet, welches als Spante bezeichnet wird. In diesen Diskontinuitätsbereichen geben die Bögen, wie bei den Kreuzgewölben, ihre Kräfte an die Grate oder an die horizontalen Flächen ab. Letztere stellen somit nicht nur aus gestalterischer, sondern auch aus statischer Sicht eine Störung dar (Bild 7.29).

Da die Radialbögen eines Fächergewölbes sich von der Rotationsachse weg krümmen, sind Konoide eine doppelt gekrümmte Fläche und müssten im Sinne der Tragwerkslehre eigentlich als Schalen und nicht als Gewölbe bezeichnet werden. Trotzdem werden die vorliegenden Tragwerke als Gewölbe betrachtet, denn vom statischen Gesichtspunkt her ist die Bezeichnung zutreffend, weil sich auf der Oberfläche effektiv Bögen ausbilden, welche die Beanspruchungen in einer einzigen Richtung abtragen, genau wie bei den Gewölben. Diese Bögen sind radial angeordnet wie die Stäbe bei einem Fächer.

Ein zeitgenössisches Beispiel von Fächergewölben ist die Überdeckung des Centre des Nouvelles Industries et Technologies in Paris (Bild 7.30). Es handelt sich um ein im Grundriss dreieckförmiges Tragwerk in Stahlbeton von beeindruckenden Dimensionen. Um die Stabilität zu erhöhen und den Einfluss der veränderlichen Lasten zu begrenzen ist das Tragwerk aus zwei Schalen aus Stahlbeton zusammengesetzt (Stärke 6-12 cm), welche einen veränderlichen Abstand zwischen 1.90 m und 2.75 m zueinander aufweisen.

7.7 Schalen

In den bisherigen Abschnitten wurden räumliche Bogentragwerke betrachtet, welche durch wiederholte Anwendung einer einfachen geometrischen Operation auf einen Ausgangsbogen erzeugt werden können: Tonnengewölbe durch eine Tanslation des Bogens, Kuppeln durch eine Rotation des Bogens.



Bild 7.29: King's College Chapel, Cambridge, 1446-1515



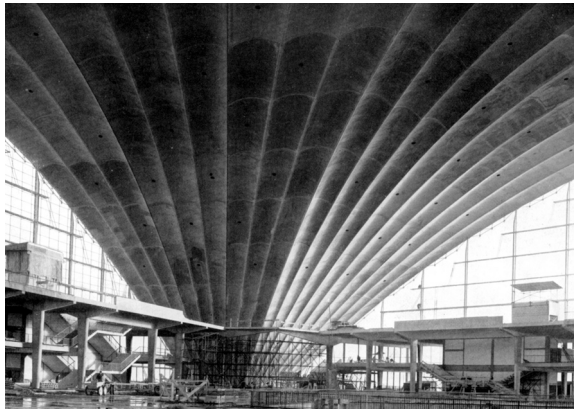


Bild 7.30: Centre des Nouvelles Industries et Technologies, Paris, 1956-58, Arch.: Robert Edouard Camelot, Jean de Mailly und Bernard Louis Zehrfuss, Ing.: Nicolas Esquillan

Die Familie der räumlichen Bogentragwerke ist jedoch wesentlich grösser und beinhaltet eine ganze Serie von Flächen, welche nicht unbedingt diesen einfachen Symmetrie erzeugenden Bildungsgesetzen folgen. Man spricht dann von *Kuppeln ohne Rotationssymmetrie* oder einfach von *Schalen*. Darunter werden räumliche Tragwerke verstanden, welche vorwiegend auf Druck beansprucht sind, so dass ihre Stärke verglichen mit ihren restlichen Abmessungen sehr gering ist. Mit anderen Worten handelt es sich um zu den räumlichen Seiltragwerken duale Tragwerke, welche auf Druck beansprucht sind.

Schalen mit gleich gerichteter Krümmung

Tonnengewölbe entstehen durch die Translation eines Bogens (Bild 7.31a). Dieses einfache Bildungsgesetz erlaubt es, das Tragverhalten der Gesamtfläche aus dem Tragverhalten des einzelnen Bogens direkt abzuleiten. Das Tragverhalten ist dabei jedoch noch nicht wirklich räumlich, sondern im Wesentlichen planar. Für die durch Rotation erzeugten Kuppeln gilt sinngemäss dasselbe.

Durch die Translation des erzeugenden Bogens werden beim Tonnengewölbe zwei Auflagerlinien erzeugt, d.h. der Bogen und die Auflagerlinien charakterisieren die Gewölbefläche vollständig. Werden diese Auflagerlinien durch einen Bogen ersetzt, so entsteht eine Fläche,



Bild 7.33: Überdachung der Autobahnraststätte Deitingen, 1968, Arch. & Ing.: Heinz Isler

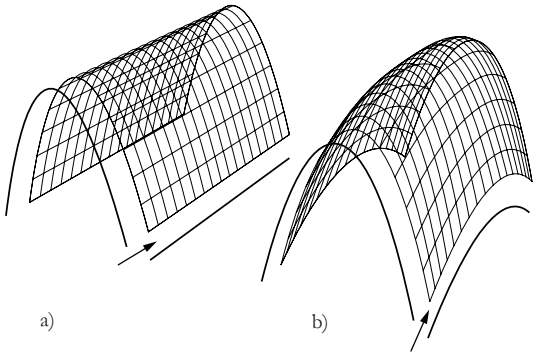


Bild 7.31: Flächenerzeugung durch Translation eines Bogens

die im Gegensatz zum Tonnengewölbe nicht mehr zwei Auflagerlinien besitzt, sondern lediglich vier Auflagerpunkte (Bild 7.31b). Die verschobenen Bögen können dann nicht mehr auf identische Art die Lasten abtragen: das Tragwerk hat sich in ein wahrhaft räumliches Tragwerk verwandelt.

Im Gegensatz zum Tonnengewölbe ist die entstandene Fläche doppelt gekrümmt, mit einer Familie von Bögen als Sekundärtragwerk. Durch die Krümmung können sich somit zwei verschiedene *Systeme von Druckbögen* bilden, welche in der Lage sind, je einen Anteil der Lasten abzutragen. Die Tragwirkung von Schalen funktioniert also nicht mittels Einzelbögen, sondern als systemisches Zusammenspiel von Bögen. Durch Variation einer der Auflagerlinien, etwa der Reduktion auf einen Punkt, können auf diese Art sehr elegante Tragwerke

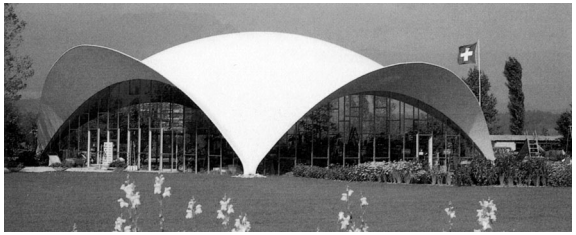


Bild 7.34: Gartencenter Wyss, Soleta, 1961, Arch. & Ing.: Heinz Isler

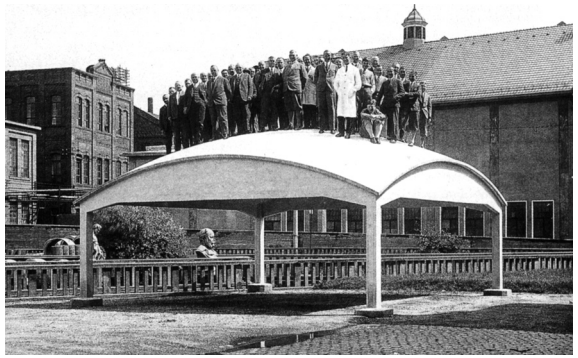


Bild 7.32: Versuchskuppel, Jena, 1932, Ing.: Franz Dischinger & Ulrich Finsterwalder

erzielt werden, wie Heinz Isler mit seine Schalenbauten bewiesen hat (Bilder 7.33 und 7.34).

In Spezialfällen kann, wie in Abschnitt 7.5 gezeigt wurde, ein System von Bögen durch eine auf Zug beanspruchte Zone (System von Zugelementen) gehalten sein. Die Einführung des Betons hat es ermöglicht, mit sehr dünnen Schalen von wenigen Zentimetern Stärke beträchtliche Spannweiten zu überdecken. Die ersten Beispiele weisen dabei relativ massive Randelemente auf (Bild 7.32). Diese dienten vor allem der Einleitung der inneren Kräfte in die Auflager und wirkten Stabilitätsproblemen entgegen.

Eine interessante Entwicklung bestand darin, die Schale entlang ihren Rändern zu falten, um eine Versteifung zu erzielen. Bei der von Isler entwickelten Schale im Bild 7.34 verlaufen die so erhaltenen Versteifungen bis zu den Auflagern. Eine Alternative besteht darin, die Stärke der Schale im Bereich der Ränder und der Auflager zu vergrössern.

Schalen mit entgegengesetzt gerichteter Krümmung

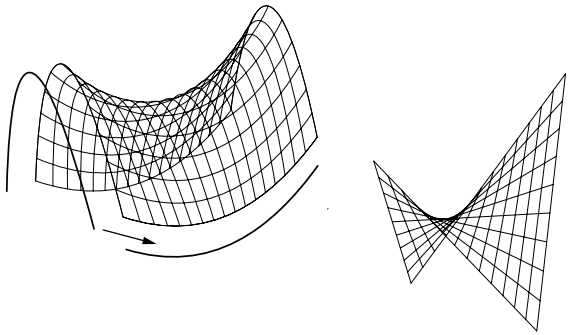


Bild 7.35: Geometrische Konstruktion einer Sattelfläche und das hyperbolische Paraboloid als linearisierte Version

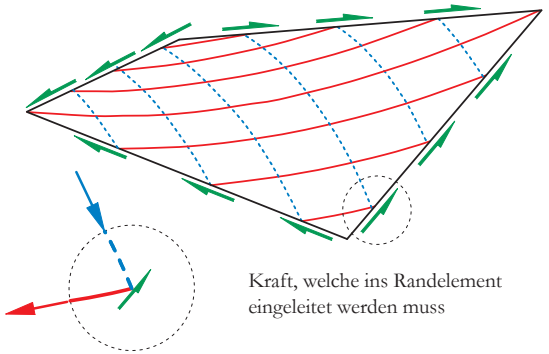


Bild 7.36: Tragwirkung einer Schale in der Form eines hyperbolischen Paraboloids

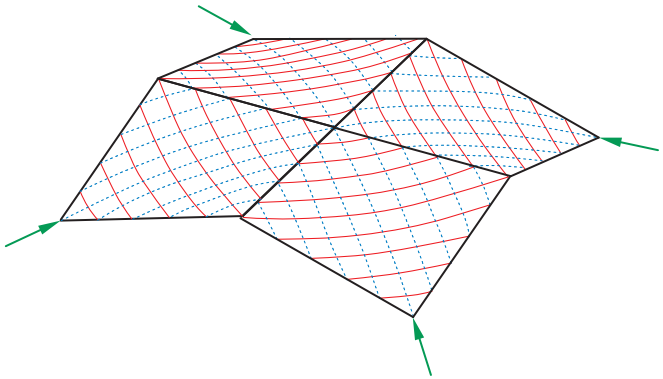


Bild 7.37: Tragwirkung einer aus vier hyperbolischen Paraboloiden bestehenden Überdachung mit Eckauflagerung

Werden die Auflagerlinien durch nach unten gekrümmte Bögen ersetzt, so entsteht bei Verschiebung des erzeugenden Bogens entlang dieser Linien eine Fläche mit entgegengesetzt gerichteter Krümmung, eine sogenannte *Sattelfläche* (Bild 7.35). Diese weist dasselbe Krümmungsverhalten auf wie ein hyperbolisches Paraboloid. In Kapitel 4 wurde gezeigt, das ein auf Zug wirkendes räumliche Seitragwerk diese Eigenschaft besitzt. Eine auf Druck wirkende Schale mit entgegengesetzt gerichteter Krümmung kann daher verstanden werden als ein *zu räumlichen Seiltragwerken duales Tragwerk.*

Der Prototyp eines solchen räumlichen Seiltragwerks ist das hyperbolische Paraboloid. In Abschnitt 4.2 wurde verdeutlicht, dass die in den Hauptkrümmungsrichtungen des hyperbolischen Paraboloids liegenden parabolische Schnitte entgegensetzte Krümmungsrichtungen aufweisen. Wird eine entsprechende Schale aus einem Material mit Druck- und Zugfestigkeit, wie zum Beispiel Stahlbeton, ausgeführt, können sich unter einer vertikalen Last auf Druck beanspruchte Bögen in Richtung der nach unten gekrümmten Parabeln ausbilden, während in der anderen Richtung die Schale auf Zug beansprucht werden kann, indem sich eine Membran ausbildet, deren inneren Kräfte von den Bewehrungseisen aufgenommen werden (Bild 7.36). Jedes dieser Elemente ist somit in der Lage, einen Teil der Lasten abzutragen.

Die Analyse kann getrennt durchgeführt werden, indem zuerst die Bögen und in einem zweiten Schritt die Seile der Membran untersucht werden. Bei der Verteilung der Lasten auf die Bögen und auf die Membran muss das Gleichgewicht an den Rändern berücksichtigt werden. Falls keine steifen Randträger vorhanden sind, welche Zug- oder Druckkräfte in Querrichtung aufnehmen können, müssen die Kraftkomponenten der Bögen und der Membran sich in dieser Richtung gegenseitig aufheben. Es verbleibt dann lediglich eine innere Kraft entlang des Randes, welche mit einer dünnen Rippe oder mit einem schmalen Bereich in der Schalenebene aufgenommen werden kann. Durch nebeneinander Anordnen mehrerer hyperbolischer Paraboloide, deren Berührungslinien Kanten bilden, enstehen interessante Tragwerke. Eine klassische von Felix Candela (1910-1997) entwickelte Zusammensetzung dieser Art besteht aus vier identischen Elementen, welche im Zentrum

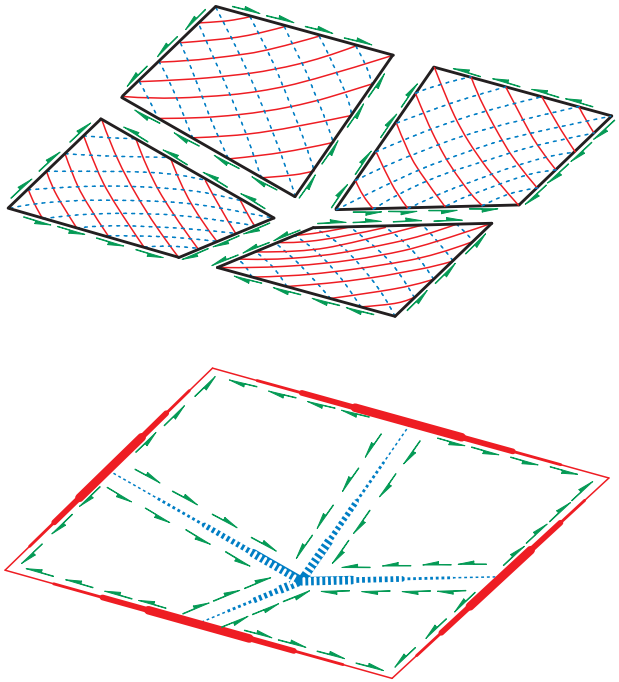


Bild 7.38: Tragwirkung einer aus vier hyperbolischen Paraboloiden bestehenden Überdachung mit zentraler Stütze

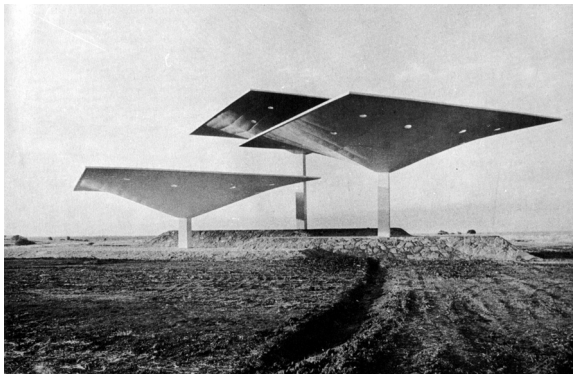


Bild 7.39: Industriepark Great Southwest, Dallas, 1958, Arch. & Ing.: Felix Candela

auf einer Stütze aufgelagert sind (Bild 7.39).

Die vier Kanten sind Druckstäbe mit zur Stütze hin zunehmenden inneren Kräften, deren horizontale Komponenten sich bei der Stütze kompensieren, während die vertikalen Komponenten sich addieren und in die Stütze eingeleitet werden (Bild 7.38). Auch an den äusseren Rändern sind Randkräfte vorhanden, welche von vier auf Zug beanspruchten Randelementen aufgenommen werden.

Die Zusammensetzung der vier Elemente kann alternativ auch so erfolgen, dass das resultierende Tragwerk gemäss Bild 7.37 an seinen vier Ecken aufgelegt ist. Dieses hat eine Verwandschaft mit den Fächergewölben (vgl. Abschnitt 7.6). Bei jedem Auflager laufen zwei auf Druck beanspruchte Randrippen zusammen, deren innere Druckkräfte wie beim Fächergewölbe nebst vertikalen auch horizontale, in Grundrissdiagonale gerichtete horizontale Komponenten aufweisen, deren Aufnahme sicherzustellen ist.

Ähnlich wie bei den Fächergewölben ist es auch möglich, mehrere hyperbolische Paraboloide nebeneinander anzuordnen. Auf diese Art erhält man eine Überdachung mit vielen Auflagern (Bild 7.40). Bei Candelas Überdachung fallen bei den beschriebenen hyperbolischen Paraboloiden die Ränder mit den geradlinigen Erzeugenden zusammen. Dies ist jedoch nicht notwendig. So hat Candela in anderen Projekten gezeigt, dass auch andere Randkurven, wie etwa eine Parabel oder Hyperbeln, zur Verbindung verwendet werden können (Bild 7.41).
Analog zu den Kreuzgewölben, welche aus der Zusammensetzung von Tonnengewölben resultieren, entstehen komplexere Schalen aus der Zusammensetzung von Sattelflächen (Bild 7.42). Es ist dabei auch möglich im Bereich der Schnitte Kanten auszubilden, oder aber diese Bereiche so zu formen, dass man eine kontinuierliche Fläche erhalten kann.

Schalen mit beliebig gerichteter Krümmung

Alle bisher behandelten Gewölbe waren dadurch gekennzeichnet, dass sich über die gesamte Gewölbefläche der Grundtypus der Krümmung nicht verändert hat. Dabei lassen sich bei Flächen drei Krümmungstypen unterscheiden: sind die Hauptkrümmungsrichtungen in einem Punkt der Fläche entgegengesetzt gekrümmt, so spricht man von einem *hyperbolischen* Punkt, sind die Hauptkrümmungsrichtungen gleich gerichtet gekrümmt, so spricht man von einem *elliptischen* Punkt. Ist eine der Richtungen nicht gekrümmt, so wird der Punkt als *parabolisch* bezeichnet (Bild 7.42). Das hyperbolische Paraboloid, die Kuppeln und das Tonnengewölbe sind Musterbeispiele für Gewölbe mit einer hyperbolischen, elliptischen oder parabolischen Krümmung und beschreiben zugleich das prinzipielle Tragwerksverhalten von derartig gekrümmten Flächen. Ein Ansatz zum Verstehen des Tragverhaltens einer beliebig gekrümmten Fläche besteht daher darin, durch eine Krümmungsanalyse diese Fläche in überwiegend

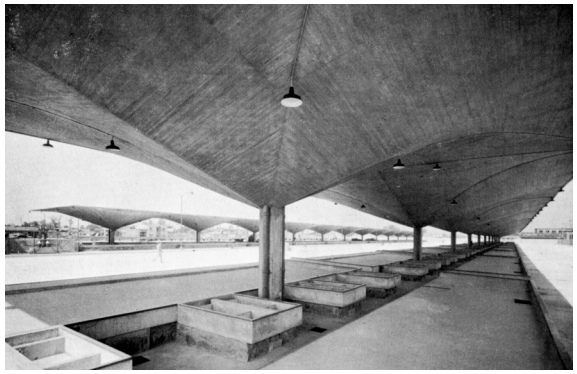


Bild 7.40: Grosshandelsmarkt, Mexiko Stadt, 1956, Arch. & Ing.: Felix Candela

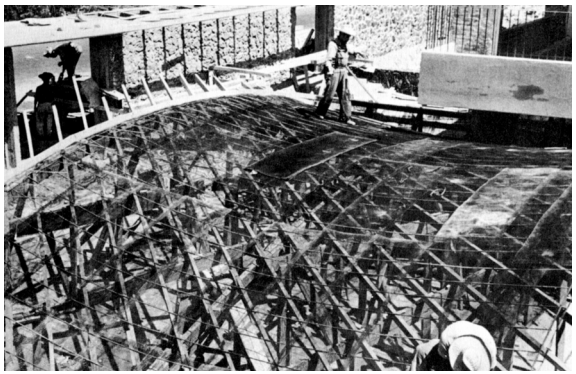


Bild 7.41: Schalungsarbeit für das Tragwerk der Casa Almada, Mexiko Stadt, 1951-52, Arch.: Horacio Almada, Ing.: Felix Candela

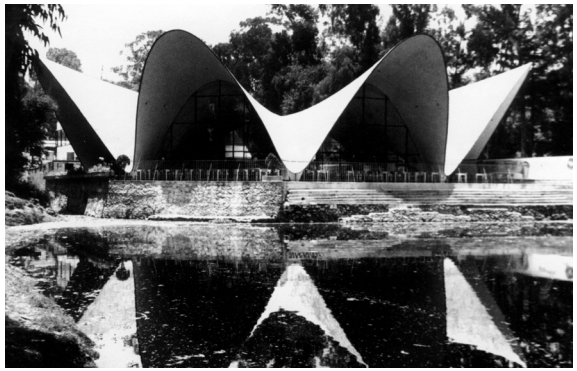


Bild 7.42: Restaurant Los Manantiales, Xochimilco, 1957, Arch. & Ing.: Felix Candela

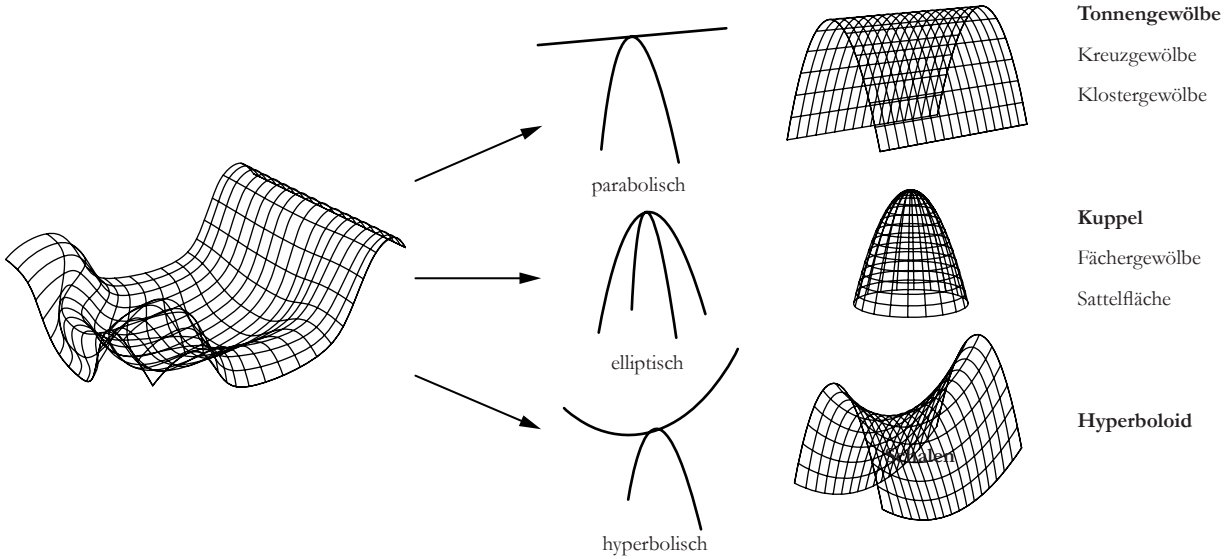


Bild 7.43: Klassifikation der Krümmung und zugehörige Modellflächen

hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch gekrümmte Bereiche zu zerlegen (Bild 7.43). Ähnlich wie in der zuvor behandelten Überdachung von Candela kann dann das Gesamtverhalten der Fläche zusammengesetzt werden aus einer Vielzahl einfacherer Tragwerkselemente, deren Tragverhalten jeweils aus den drei Prototypen abgeleitet werden kann.

Die genaue Art der Zerlegung in einfachere Tragwerkselemente macht eine differentialgeometrische Betrachtung der Fläche notwendig und übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung. Es wird jedoch deutlich, dass bei der

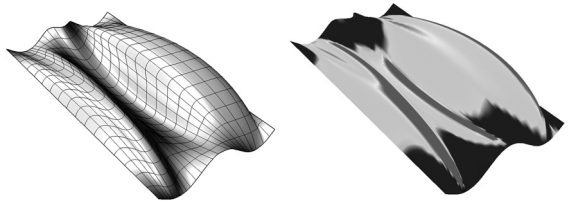


Bild 7.44: Krümmungsanalyse einer beliebig gekrümmten Schale

Verwendung einer beliebig geformten Fläche als Tragwerk ein komplexes, sich gegenseitig beeinflussendes Zusammenspiel von Zug- und Druckkräften zwischen den verschieden gekrümmten Tragwerkselementen stattfindet. Aus diesem Grund ist der auf Zug und Druck belastbare Stahlbeton trotz des grossen Schalungsaufwands immer noch das bevorzugte Material bei der Realisierung von Bauwerken mit komplexer Geometrie, wie etwa dem Krematorium in Kakamigahara von Toyo Ito (Bild 7.45) oder dem Learning Center der ETH Lausanne von Sanaa.

7.8 Aufgelöste räumliche Bogentragwerke



Bild 7.45: Krematorium, Kakamigahara, 2006, Arch.: Toyo Ito, Ing.: Mutsuro Sasaki



Bild 7.46: Kuppel des Reichstags, Berlin, 1992-99, Arch.: Norman Foster, Ing.: Leonhardt Ändra & Partner



Bild 7.47: Konferenzraum im Lingotto, Turin, 1996, Arch.: Renzo Piano, Ing.: Büro Ove Arup



Bild 7.48: Aquatoll, Neckarsulm, 1988-90, Arch.: Karl-Ulrich Bechler, Ing.: Schlaich, Bergermann und Partner

Bei den in diesem Kapitel behandelten Tragwerken aus Mauerwerk oder Beton wurden die inneren Kräfte mit Hilfe von in der Tragwerksfläche liegenden ideellen Druckbögen und Zugeseilen aufgenommen. Es liegt somit nahe, den umgekehrten Weg zu beschreiten wie er im Bild 7.2 beschrieben wurde, und die inneren Kräfte auf ausgewählte *diskrete Tragelemente*, welche auf der Tragwerksoberfläche liegen, zu konzentrieren. Das Material zwischen diesen Bögen und Zugseilen ist dann für das Tragwerk überflüssig geworden und kann weggelassen werden. Es wird somit möglich, räumliche Bogentragwerke zum Beispiel aus Stahl- oder aus Holzstreben zu entwickeln. Kontinuierliche Schalentragwerke aus Stahlbeton sind heute aus wirtschaftlichen Gründen immer seltener ausführbar, so dass die zeitgenössischen Schalentragwerke weitgehend diskrete Tragwerke aufweisen.

Wie das Beispiel der Kuppel des Reichstags in Berlin zeigt, können Stahlkuppeln aus diskreten Bögen und Ringen zusammengesetzt werden (Bild 7.46). Die Verkleidung, häufig aus verglasten Oberflächen bestehend, hat im Allgemeinen keine primär tragende Funktion mehr. Die Bögen werden mit Hilfe der Ringe stabilisiert, welche weiter eine grössere Freiheit bei der Formbildung erlauben, da die Bögen, ähnlich wie bei den kontinuierlichen Kuppeln, dank der Umlenkkräfte der Ringe nicht mehr der idealen Drucklinie infolge äusserer Lasten folgen müssen. Auch betreffend Anordnung von Scheitelöffnungen gelten die gleichen Überlegungen wie bei den kontinuierlichen Kuppeln.

Die Diskretisierung der Tragelemente bringt den Nachteil mit sich, dass die Richtungen der inneren Kräfte durch diejenige der Tragelemente vorgegeben sind und somit die *Anpassungsfähigkeit der Tragwirkung eingeschränkt* wird. Das Tragwerk kann sich zwar, wie beschrieben, bei einseitigen Nutzlasten dank der Ringe recht gut anpassen. Unter seitlichen Wind- oder Erdbebenkräften können die Bögen und die Ringe dagegen ihre Richtung auf der Tragwerksfläche nicht verändern. Die zur Gewährleistung des Gleichgewichtes unter horizontalen Einwirkungen erforderlichen konstruktiven Massnahmen werden in den Kapiteln 10 bis 12 behandelt.

Die effizienteste Massnahme besteht in einer Ausfachung der Zwischenräume der Bögen und Seile entweder durch *Druck- oder Zugdiagonalen* (Bild 7.47), oder durch eine Beplankung. Eine weitere Lösung, welche ein wesentlich weicheres Tragverhalten zur Folge hat, besteht in der Aktivierung der Biegesteifigkeit der Druckbögen und der Zugelemente (Vierendeel-Tragwirkung). Bei den beschriebenen Lösungen treten die radialen Bögen und die horizontalen Ringe dominant in Erscheinung.

Dank der grossen Freiheit betreffend Ausbildung der inneren Kräfte sind weitere diskrete Tragwerke für die Kuppeln entwickelt worden. Die im Bild 7.48 dargestellten *Gitterkuppel* besteht aus zwei sich kreuzenden Bogenscharen. Diese gewährleisten noch kein genügend ausgesteiftes Tragwerk, so dass auch hier die von den Bögen gebildeten Maschen mit kreuzweisen Seilen

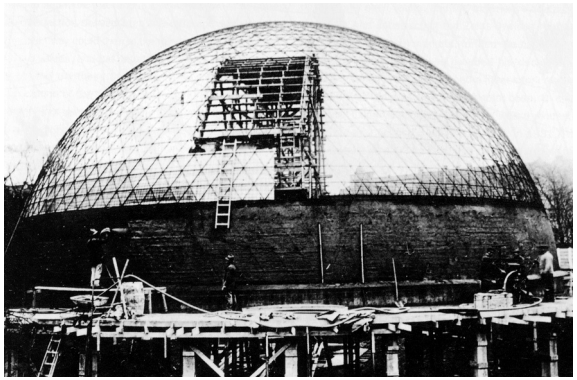


Bild 7.49: Stahlgerüst des Planetarium, Jena, 1926, Arch.: Johannes Schreiter & Hans Schlag, Ing.: Franz Dischinger & Walter Bauersfeld

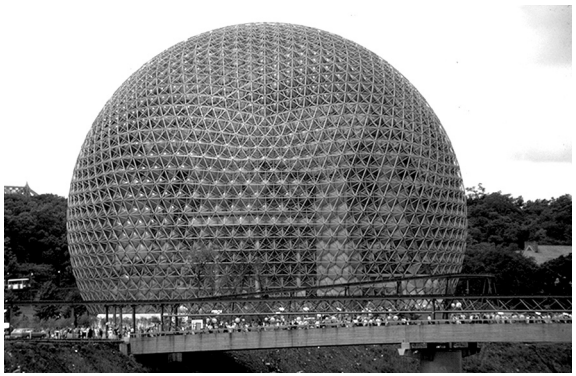


Bild 7.50: US Expo-Pavillion, Montreal, 1967, Arch & Ing.: Buckminster Fuller & Shoji Sadao



Bild 7.51: Weald and Downland Gridshell, bei Chichester, 2002, Arch.: Edward Cullinan, Ing.: Buro Happold

ausgefacht wurden.

Zur Vermeidung der Ausfachungen zwischen den tragenden Bogensegmenten können drei Bogenscharen angeordnet werden. Die entsprechenden Tragwerke werden als *geodätische Kuppeln* bezeichnet. Ihre Gitterstruktur basiert auf einem Ikosaeder, also einem Polyeder aus 20 gleichen Seitenflächen. Die Anordnung der Stäbe erlaubt die Bildung von inneren resultierenden Druckkräften in beliebige Richtungen auf der Kuppelfläche, so dass sich beliebig gerichtete ideelle Druckbögen, und falls erforderlich, auch Zugringe bilden können.

Die Kuppel des Zeiss-Planetariums in Jena (Bild 7.20) wurde mit Hilfe eines solchen Stahlgerüsts erstellt, welches in die sehr dünne Schale aus Spritzbeton einbetoniert wurde (Bild 7.49). Dieses als geodätische Kuppel ausgebildete Stahlgerüst diente einerseits als Leergerüst für die Schalung, andererseits ist es zuständig für die Aufnahme der Zugkräfte, welche entstehen, weil die radialen Bögen in der kugelförmigen Kuppel nicht der idealen Drucklinie unter den äusseren Lasten entsprechen. Buckminster Fuller (1895-1983) verwendete geodätische Kuppeln in mehreren Projekten und bewies dabei, dass sich mit dieser Tragwerksart Kuppeln realisieren lassen, welche weit mehr als 180° im Schnitt abdecken (Bild 7.50).

Diskret ausgebildete Schalen mit beliebigen Geometrien der Bogenelemente, wie das Weald and Downland Museum, werden als *Gitterschalen* bezeichnet (Bilder 7.51 und 7.52). Wie weiter oben erwähnt, stellen sie aus wirtschaftlichen Gründen den zeitgemässen Typus der Schalen dar. Auch bei diesen Tragwerken kann durch kreuzen dreier Bogenscharen eine grosse Steifigkeit und eine gute Stabilität erzielt werden. Wenn eine sehr grosse Transparenz des Tragwerks verlangt wird, ist es allerdings vorzuziehen, auf die dritte Bogenschar zu verzichten und es durch eine Schar filigraner Kabel zu ersetzen. Die Multihalle in Mannheim, entworfen von Carlfried Mutschler und Frei Otto, ist ein anschauliches Beispiel hierfür (Bilder 7.53 und 7.54).

.



Bild 7.52: Weald and Downland Gridshell, bei Chichester, 2002, Arch.: Edward Cullinan, Ing.: Buro Happold



Bild 7.53: Multihalle, Mannheim, 1975, Arch.: Carlfried Mutschler & Frei Otto, Ing.: Büro Ove Arup & Büro Happold

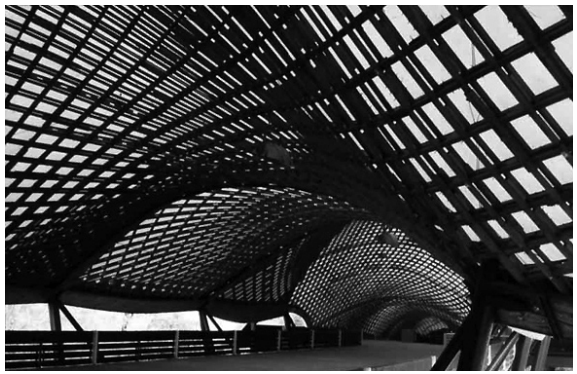


Bild 7.54: Multihalle, Mannheim, 1975, Arch.: Carlfried Mutschler & Frei Otto, Ing.: Büro Ove Arup & Buro Happold

8 Bogen-Seiltragwerke

Am Beispiel von Kuppelbauten wurde bereits darauf hingewiesen, dass gebaute Tragwerke häufig zugleich Druck- wie auch Zugelemente benötigen. Erst das von Poleni vorgeschlagene Zugband für die Kuppel des Petersdoms verhinderte die weitere Rissbildung, verursacht durch die nicht exakte Übereinstimmung der Drucklinien mit der Bogenachse. Dieses Problem ist kein Einzelfall, sondern ein generelles Phänomen. Bei den Seil- und Bogentragwerken weisen die Auflagerkräfte horizontale Komponenten auf, welche in das Erdreich oder an angrenzende Bauelemente eingeleitet werden müssen. Falls dies nicht möglich ist, drängen sich Lösungsansätze auf, diese Kräfte mit zusätzlichen auf Druck oder auf Zug beanspruchten, die Auflager verbindenden Tragelementen aufzunehmen. Die entsprechenden Tragwerke werden als Bogen-Seiltragwerke bezeichnet. Nebst ihrer Anwendung als eigentliche Tragwerksart kommt den Bogen-Seiltragwerken im weiteren Verlauf des Manuskripts eine zentrale Bedeutung zu, denn Bogen-Seiltragwerke werden systematisch herangezogen, um die inneren Kräfte in Fachwerken, Balken und Rahmen vereinfachend zu visualisieren.

8.1 Einfache Bogen-Seiltragwerke

Wie bei den Seilen und Bögen, so auch bei den räumlichen Seil- und Bogentragwerken, werden die Lasten mit Hilfe gekrümmter Tragelemente aufgenommen, welche vorwiegend innere Zug- oder Druckkräfte aufweisen. Da diese Tragelemente bei den Auflagern geneigt verlaufen, entsteht nebst der vertikalen auch eine *horizontale Auflagerkraft*, eine Zugkraft bei den Seilen und eine Druckkraft bei den Bögen. Falls die Auflager nicht in der Lage sind, die Horizontalkomponenten der Auflagerkräfte aufzunehmen, können diese bei einem Seiltragwerk mit Hilfe eines einfachen Druckstabes und bei einem Bogentragwerk mit Hilfe eines einfachen Seiles gemäss Bild 8.1 aufgenommen werden. Dieses *Zusammenbinden der Auflager* kann sowohl beim Entwurf neuer Tragwerke als auch zur Verstärkung bestehender Bauwerke angewendet werden.

Die Tragwirkung wird aus einfachen Subsystemen bei den Auflagern ersichtlich: die vertikale Komponente der geneigten inneren Seil- bzw. Bogenkraft ist im Gleichgewicht mit der vertikalen Auflagerkraft, während die horizontale Komponente im Gleichgewicht ist mit der inneren Kraft des neuen horizontalen Tragelementes. Aus dieser Betrachtung folgt eindeutig, dass das neue Tragelement beim Bogen auf Zug und beim Seil auf

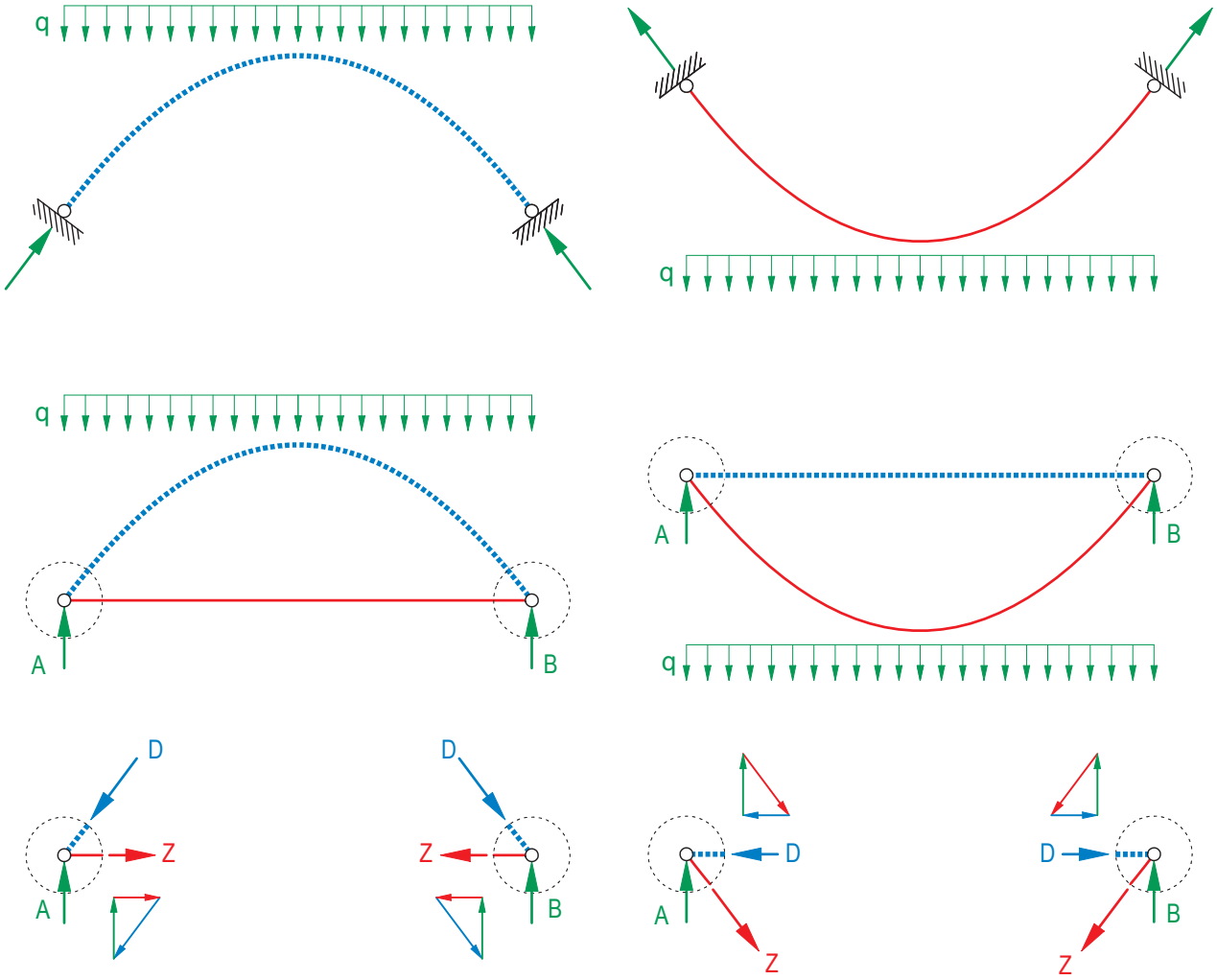


Bild 8.1: Tragwirkung einfacher Bogen-Seiltragwerke

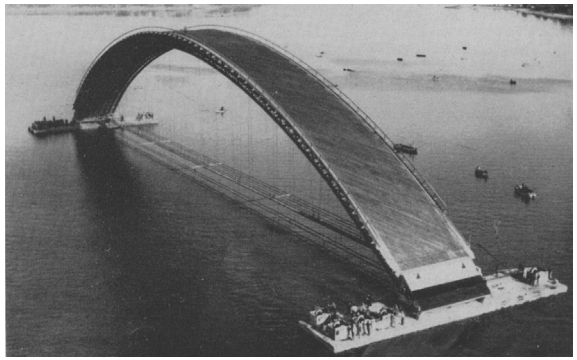


Bild 8.2: Schwimmende Schalung der Brücke Albert-Louppe, Plougastel, 1924-30, Ing.: Eugène Freyssinet

Druck beansprucht sein muss. Beim Bogen ist gut ersichtlich, wie die Zugkraft des horizontalen Zuggliedes die geneigte Bogenkraft in die vertikale Richtung umlenkt. Dieser Effekt ist analog zu demjenigen der Zugringe bei den Kuppeln. Da die Kraft an beiden Enden des neuen Tragelementes gleich gross ist, wird klar, dass die horizontalen Komponenten der Auflagerkräfte *von einer Seite des Tragwerks zur anderen übertragen* werden.

Im Bild 8.2 ist ein Tragwerk dargestellt, welches dieses Prinzip ausnützt. Es handelt sich um die Schalung für den Bau eines Stahlbetonbogens für eine Brücke in Plougastel. Während des Verschiebens von einem Brückenfeld zum nächsten wurde das bogenförmige Leergerüst auf zwei hölzerne Flösse abgestellt. Diese Flösse waren selbstverständlich nur in der Lage, vertikale Auflagerkräfte zu übertragen (Auftriebskraft von Archimedes). Durch die Zugglieder aus Stahl konnten die horizontalen Auflagerkräfte aufgenommen werden.

Um die zusätzlichen, die Auflager verbindenden Tragelemente aktivieren zu können, muss eines der beiden Auflager verschieblich ausgebildet werden. Nur so kann gewährleistet werden, dass das zusätzliche Tragelement sich verformen kann, eine unabdingbare Bedingung zur Erzeugung einer inneren Kraft. Beide Auflager dürfen dagegen nicht verschieblich sein, weil dies zu einem labilen System führen würde, welches unter horizontalen äusseren Kräften (Wind oder Erdbeben) davongleiten würde. Aus diesem Grund ist es erforderlich, auf der einen Seite ein *festes Lager* anzuordnen um die horizontalen Lasten aufnehmen zu können, und auf der anderen Seite ein *verschiebliches Lager* anzuordnen, um die für die Aktivierung des Zugglieds erforderliche Verformung sicherzustellen.

Die Gelenke bei den Auflagern der Bögen sind ein typisches Beispiel von festen Auflagern, welche eine Verdrehung ermöglichen, während sowohl die horizontale

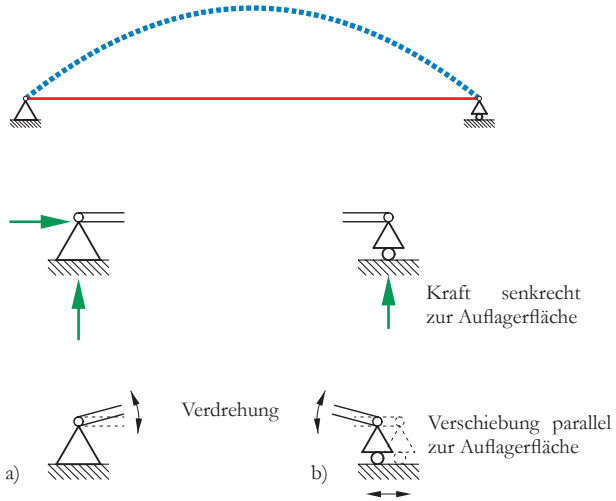


Bild 8.3: Feste (a) und verschiebliche (b) Lager

als auch die vertikale Verschiebung verhindert ist (vgl. Abschnitt 6.7). Demzufolge können Kräfte mit einer beliebigen Richtung aufgenommen werden, also Kräfte mit einer horizontalen und einer vertikalen Komponente. Solche festen Auflager werden mit einem kleinen Dreieck dargestellt (Bild 8.3a). Die verschieblichen Auflager sind Bauteile, welche Verschiebungen in einer Richtung zulassen und somit nur Kräfte *senkrecht zur Verschiebungsebene* übertragen können. Sie werden mit

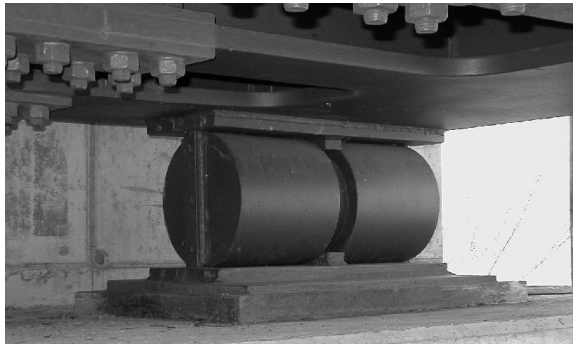


Bild 8.4a: Bewegliches Auflager: Rollenlager



Bild 8.4b: Bewegliches Auflager: Pendellager

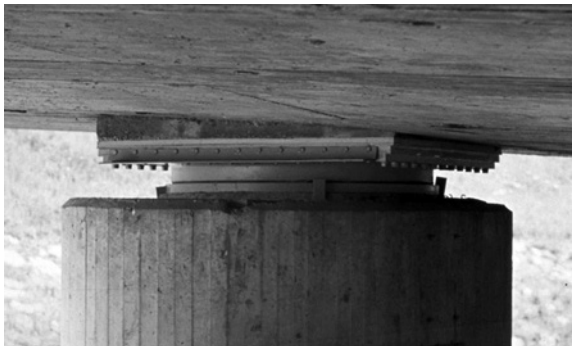


Bild 8.4c: Bewegliches Auflager: Gleitlager

einem kleinen Dreieck dargestellt, welches auf einem kleinen Kreis aufliegt, welcher eine Rolle symbolisiert (Bild 8.3b).

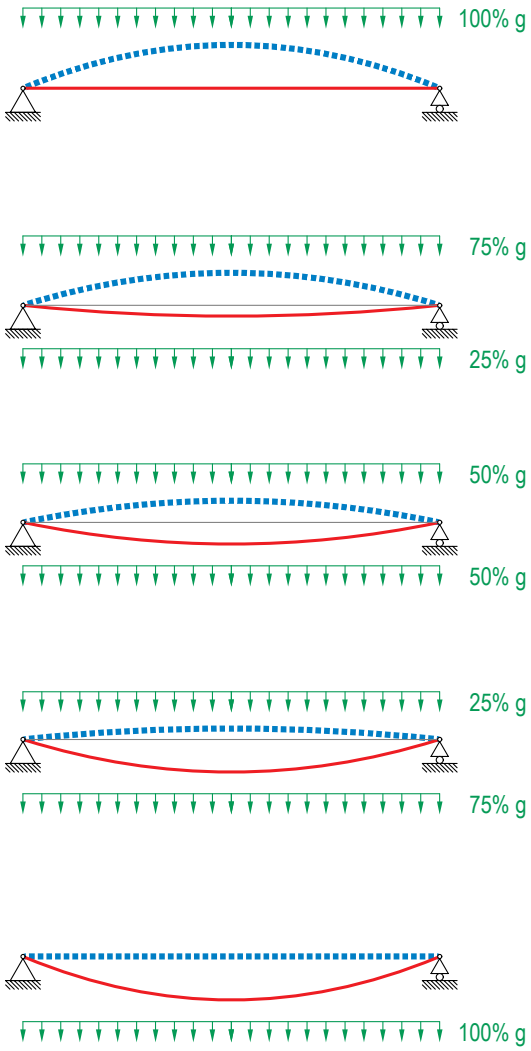


Bild 8.5: Aufteilung der äusseren Lasten auf Bogen und Seil

Diese Lager bestanden früher tatsächlich aus Stahlrollen, welche zwischen zwei Platten frei rollen konnten: die untere Platte wurde fixiert und die obere, am Tragwerk befestigte Platte, war beweglich (Bild 8.4a). Eine andere seltenere konstruktive Lösung bestand in einem kurzen Pendelstab, welcher mittels Gelenken an beiden Enden fixiert war (Bild 8.4b). Die modernen verschieblichen *Gleitlager* nutzen den geringen Gleitwiderstand zwischen synthetischen Materialien wie Teflon und der polierten Oberfläche von Chromstahl aus (Bild 8.4c). Bei solchen Materialpaarungen beträgt die Längskraft nicht mehr als 1/20 der vertikal übertragenen Kraft, so dass man von beweglichen Lagern mit praktisch freier Bewegung reden kann.

8.2 Ermittlung der inneren Kräfte

Bogen-Seiltragwerke unterscheiden sich in der Tragwirkung nur betreffend Aufnahme der horizontalen Auflagerkräfte von reinen Bögen oder Seilen. Die Aufteilung der abzutragenden Lasten auf das Bogen- und Seiltragwerk erfolgt im allgemeinen Fall in Abhängigkeit der Pfeilhöhen (Bild 8.5). So übernimmt beim Bogen mit Zugglied der Bogen selbstverständlich 100% der Lasten, während bei einem System, bei welchem die Pfeilhöhe des Bogens dreimal so gross ist wie diejenige des Seiles, der Bogen 75% und das Seil 25% der Lasten übernimmt.

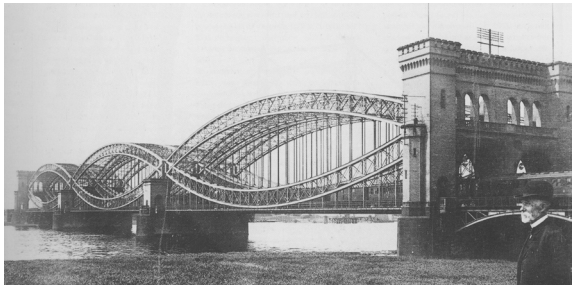


Bild 8.6: Elbe-Brücke, Hamburg, 1868-72, Arch. & Ing.: Gerhard Hermann Lohse

Die Elbe-Brücke in Hamburg ist ein Beispiel für ein Bogen- und Seiltragwerk, bei welchem der Bogen und das Seil die gleiche Pfeilhöhe aufweisen (Bild 8.6). Bogen- und Seiltragwerk haben einerseits die gleich grossen Eigenlasten, andererseits sind die Lasten der Fahrbahnplatte mit Zugseilen so an den beiden Tragelementen aufgehängt, dass die Zugseile die Hälfte ihrer Kraft an das Seiltragwerk abgeben, und die restliche Hälfte ihrer Kraft an das Bogentragwerk weiterleiten. Es ist zu bemerken, dass jedes Seiltragwerk nur eine einzige Belastung aufzunehmen vermag. Unter veränderlichen Nutzlasten sind somit wie bei den Seilen und bei den Bögen stabilisierende Massnahmen erforderlich.

Wenn die Lasten im oberen Bereich des Tragwerks angreifen, etwa Schneelasten oder Eigenlasten des Daches, so sind ebenfalls Sekundärelemente notwendig um die Lasten auf die Seile zu übertragen (Bild 8.7). Beim Lagerhaus in Chiasso von Robert Maillart ist zusätzlich die Form des Druckglieds an die Dachform angepasst, so dass eine konzentrierte Umlenkung in Feldmitte resultiert (Bild 8.8). Diese Umlenkkraft wird

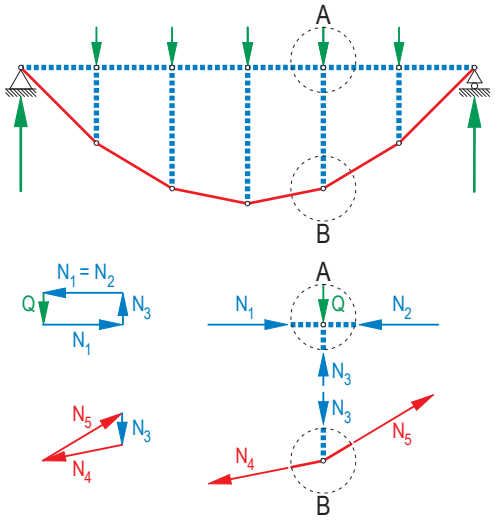


Bild 8.7: Tragwirkung eines Seils mit Druckglied

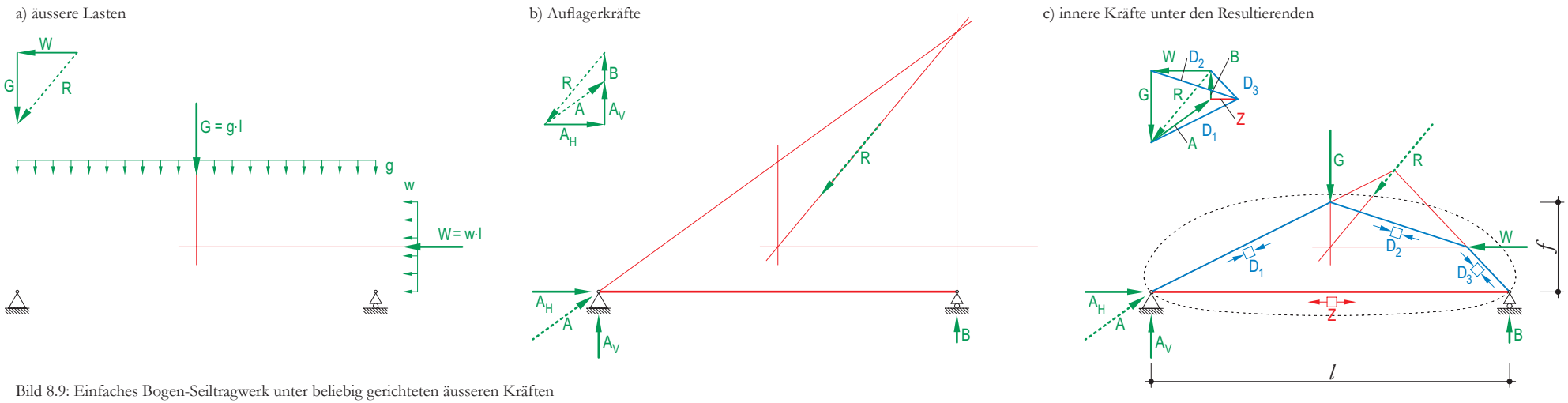


Bild 8.9: Einfaches Bogen-Seiltragwerk unter beliebig gerichteten äusseren Kräften

auf das Seil übertragen, welches somit ebenfalls eine konzentrierte Umlenkung in Feldmitte aufweisen muss. Der Mittelpfosten des Tragwerks ist demzufolge auf Zug beansprucht.

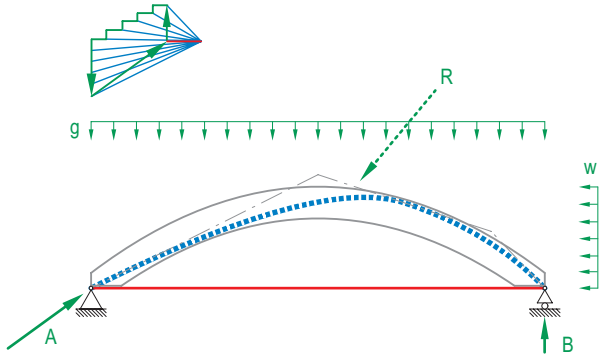
Die Auflagerkräfte sind im allgemeinen Belastungsfall von der Anordnung der festen und der verschieblichen Auflager abhängig. Die inneren Kräfte in den Bogen- und Seiltragelementen können mit den in Kapitel 3 und Kapitel 6 behandelten Verfahren ermittelt werden. Das Verfahren wird im Folgenden anhand von zwei Beispielen eines Bogens mit Zugglied aufgezeigt.



Bild 8.8: Magazzini Generali, Chiasso, 1924, Ing.: Robert Maillart

Als erstes Beispiel wird ein Tragwerk mit einer Spannweite *l* und einer Pfeilhöhe *f* untersucht, welches durch eine gleichmässig verteilte Eigenlast *g* und durch eine gleichmässig verteilte Windlast *w* beansprucht ist (Bild 8.9a). Die Ermittlung der Resultierenden *R* der äusseren Lasten erfolgt auf bekannte Weise im Kräfte- und im Lageplan. Anschliessend werden die Auflagerkräfte wie in Bild 8.9b dargestellt ermittelt. Da die *Auflagerkraft B rechtwinklig zur Verschiebefläche* des verschieblichen Auflagers gerichtet sein muss, ist die Aufgabe eindeutig lösbar. Die drei Kräfte *A*, *B*, und *R* sind miteinander im Gleichgewicht, wenn sie sich im Kräfteplan vektoriell aufheben und wenn ihre Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden. Die Wirkungslinien der Kräfte *B* und *R* sind bekannt, und somit auch der Schnittpunkt der Wirkungslinien der drei Kräfte. Damit kann die Wirkungslinie der Kraft *A* ebenfalls festgelegt werden, da sie sowohl durch diesen Schnittpunkt als auch durch das feste Auflager verlaufen muss. Das Kräftedreieck kann dann gezeichnet und die Grössen der Auflagerkräfte herausgemessen werden. Die Zerlegung der Auflagerkräfte in ihre Komponenten ist vollständigkeitshalber ebenfalls im Kräfteplan dargestellt.

d) innere Kräfte unter verteilter Last



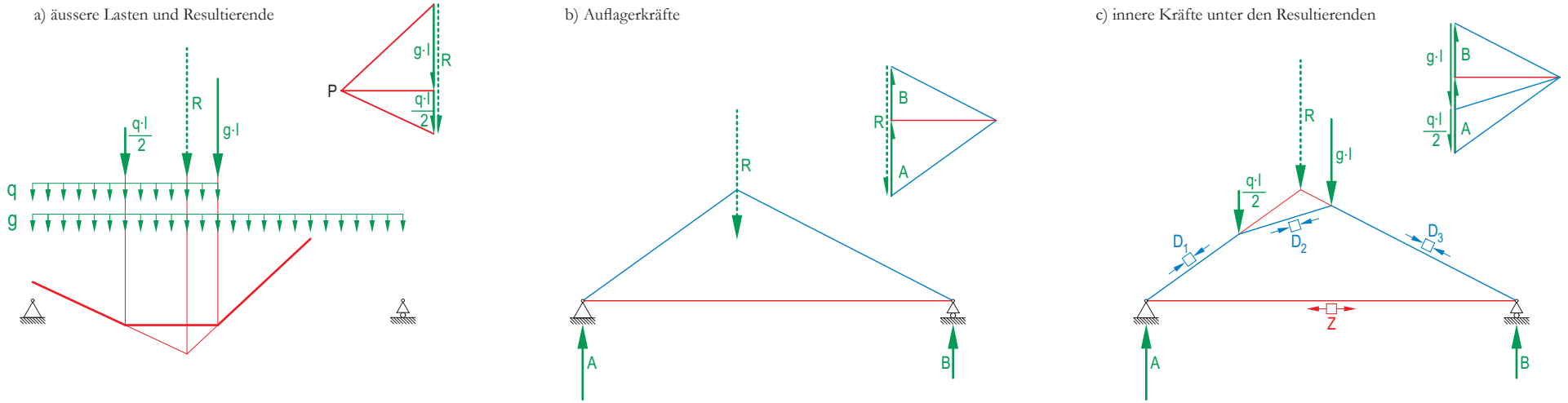


Bild 8.10: Einfaches Bogen-Seiltragwerk unter parallelen äusseren Kräften

Die Ermittlung der inneren Kräfte ist in Bild 8.9c dargestellt. Zuerst wird ein Bogen entworfen, welcher in der Lage ist, die Resultierende R zu tragen. Aus der Pfeilhöhe f ergeben sich im Lageplan die Wirkungslinie für die beiden Druckkräfte D_1 und D_3 , deren Intensität anschliessend aus dem Kräfteplan ermittelt werden kann, sind sie doch im Gleichgewicht mit der Kraft R. Auch die Kraft Z im Zugglied geht aus dem Kräfteplan hervor, und zwar aus den Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte A, D_1 und Z beim linken Auflager und aus den Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte B, D_3 und Z beim rechten Auflager. Abschliessend wird die Resultierende durch die Kräfte G und W ersetzt und der Bogen durch Einführung des Zwischensegmentes angepasst. Die Ergänzung der Kraft D_2 im Kräfteplan liefert eine Kontrolle der Lösung.

Im Bild 8.9d ist die Lösung für das Bogen-Seiltragwerk unter den gleichmässig verteilten Lasten g und q dargestellt. Diese kann auf einfache Weise qualitativ aufgezeichnet werden, unter der Bedingung, dass der gekrümmte Bogen unter gleichmässig verteilten Lasten in den polygonalen Bogen unter konzentrierten Lasten so eingeschrieben sein muss, dass er diesen sowohl bei den Auflagern als auch bei jedem Zwischensegment tangential berührt. Die Lösung kann selbstverständlich durch Zerlegung der konzentrierten Kräfte in mehrere Einzelkräfte präzisiert werden (vgl. Bild 3.7).

Falls die angreifenden Lasten G und Q parallel sind, kann sinngemäss vorgegangen werden (Bild 8.10a). Sowohl die Resultierende R als auch die Auflagerkräfte A und B können nicht mehr auf einfache Weise ermittelt werden. Die Resultierende R wird mit Hilfe des Seilpolygons konstruiert. Im zweiten Schritt kann ein Bogen-Seiltragwerk entworfen werden, welches in der Lage ist, die Resultierende R zu tragen (Bild 8.10b). Aus dem zugehörigen Kräfteplan werden sowohl die Auflagerkräfte A und B als auch die Kräfte D_1, D_3 und Z gewonnen. Im nächsten Schritt (Bild 8.10c) wird R durch die beiden Kräfte G und Q ersetzt, das Zwischensegment des Bogens entwickelt und die Kraft D_2 aus dem Kräfteplan ermittelt. Bild 8.10d zeigt die qualitative Lösung für das Bogen-Seiltragwerk unter gleichmässig verteilten Lasten.

8.3 Konsolartige Bogen-Seiltragwerke unter Einzellasten

Die vorgängig behandelten Tragwerke waren an ihren beiden Enden aufgelagert und mit vertikalen oder geneigten Lasten beansprucht. In der Folge werden Tragwerke untersucht, welche an einem ihrer Enden aufgelagert sind und am anderen Ende bzw. auf ihrer gesamten Länge belastet werden.

Das als *Konsole* bezeichnete Tragwerk in Bild 8.11a besteht aus zwei geneigten Stäben sowie aus einem dritten, die Auflager verbindenden Vertikalstab, welcher erforderlich ist, wenn ein Lager verschieblich ausgebildet wird. Die Ermittlung der Auflagerkräfte unter einer konzentrierten Last am Konsolende erfolgt einfach aus der Betrachtung der Wirkungslinie. Denn die Wirkungslinien der drei wirkenden Kräfte, also die Last und die beiden Auflagerkräfte, müssen sich in einem Punkt schneiden, und zwei dieser Wirkungslinien, nämlich diejenige der Last und diejenige der Kraft im verschieblichen Auflager, sind bekannt (Bild 8.11b). Auch die inneren Kräfte der drei Stäbe können einfach ermittelt werden, indem Subsysteme in den einzelnen Knoten untersucht werden (Bild 8.11c).

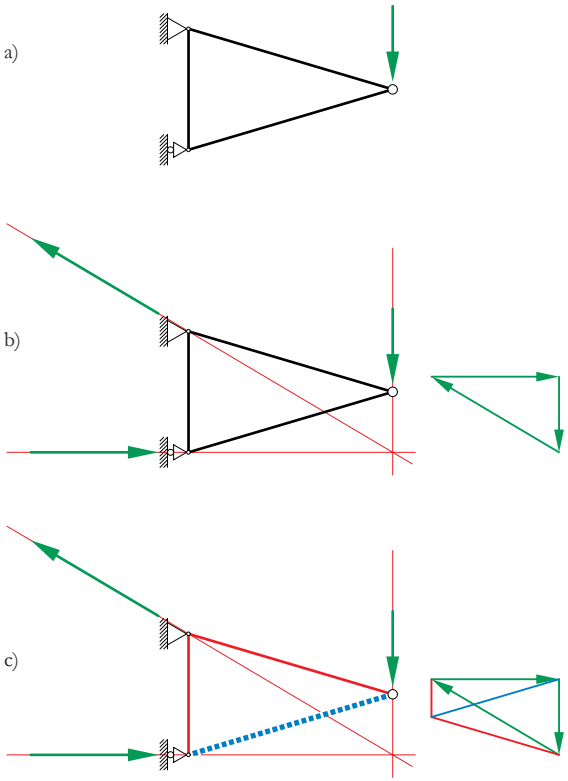


Bild 8.11: Konsole unter einer konzentrierten Einzellast

Ein Vergleich dieses Tragwerks mit den früher untersuchten, über zwei Auflager gespannten Bogen-Seiltragwerken ergibt, dass die inneren Kräfte der Stäbe unterschiedlich sind: ein Stab ist immer noch auf Druck beansprucht, der andere ist jedoch auf Zug beansprucht. Der obere Stab zieht also an der Wand, und der untere drückt gegen die Wand. Das die Auflager verbindende vertikale 'Zugglied' ist immer noch auf Zug beansprucht, weil beim untersuchten Tragwerk die äussere Last zum festen Auflager geleitet werden muss. Aus dem Bild 8.12a ist jedoch ersichtlich, dass eine Druckkraft resultiert, wenn die Auflager ausgetauscht werden, oder gleichbedeutend, wenn die äussere Last von unten nach oben gerichtet ist. Wird das bewegliche Auflager durch ein festes ersetzt, so kann auf das vertikale 'Zugglied' verzichtet werden (Bild 8.12b).

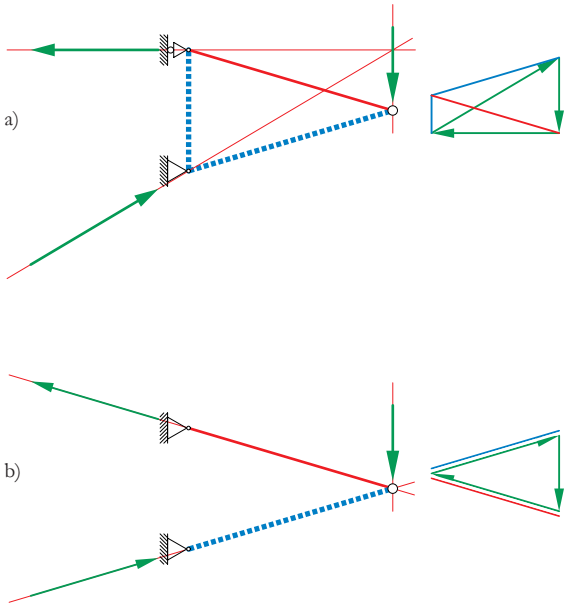


Bild 8.12: Einfluss der Art des Auflagers auf die Auflagerkräfte und die inneren Kräfte

Die äussere Fassadenebene der Hongkong and Shanghai Banking Corporation von Norman Foster wird durch Konsolen strukturiert, welche primär aus einem



Bild 8.13: Hongkong and Shanghai Banking Corporation (HSBC), Hong Kong, 1979-85, Arch.: Norman Foster, Ing.: Büro Ove Arup

geneigten Zugstab und einem horizontalen Druckstab bestehen (Bild 8.13). Diese Konsolen tragen über vertikale Zugelemente die darunter liegenden Decken. Wie bei den einfachen Bogenseiltragwerken im Bild 8.5 dargestellt, kann auch bei den Konsolen die Neigung des Druck- und des Zugelementes gewählt werden. Der Einfluss dieser Wahl ist aus dem Kräfteplan ersichtlich.

8.4 Konsolartige Bogen-Seiltragwerke unter mehreren Lasten

Wenn mehrere Konsolen, welche einzeln in der Lage sind, konzentrierte Lasten aufzunehmen, ineinander verschachtelt werden, können diese als Gesamttragwerk mehrere konzentrierte Lasten tragen (Bild 8.14). Bei diesen sogenannten abgespannten Tragwerken ist es möglich, bei beschränkter Anzahl der schrägen Seile auch konzentrierte Lasten aufzunehmen, wenn das Druckelement als Versteifungsträger wirkt.

Falls zwei Konsolen symmetrisch bezüglich ihrer vertikalen Auflagerachse zueinander angeordnet werden, sind die beiden horizontalen Auflagerkraftkomponenten jeweils miteinander im Gleichgewicht, und es müssen lediglich die vertikalen Auflagerkraftkomponenten, ähnlich wie bei den Hängebrücken, aufgenommen werden.



Bild 8.15: Le Viaduc de Millau, Département Aveyron, 1993-2004, Arch.: Norman Foster, Ing.: Michel Virlogeux



Bild 8.16: Ganterbrücke, bei Eisten, 1976-80, Arch. & Ing.: Christian Menn

Entsprechende *abgespannte Tragwerke* werden häufig angewendet bei Brücken mit mittleren Spannweiten von 100 m bis 350 m. Beim von Michel Virlogeux entworfenen Viaduc de Millau (Bild 8.15), ein Bauwerk welches zurzeit den Spannweitenrekord für abgespannten Brücken (häufig auch als *Schrägseil-* oder *Schrägkabelbrücken* bezeichnet) hält, sind die Seile in einem vergleichsweise geringen Abstand am Fahrbahnträger befestigt, so dass diesem eine untergeordnete Funktion als Versteifungsträger zukommt. Anders bei der Ganterbrücke von Christian Menn, wo die geneigten Zugelemente wesentlich konzentrierter wirken (Bild 8.16). Sie bestehen aus Vorspannkabeln, welche in Scheiben einbetoniert worden sind.

Abgespannte Tragwerke werden auch bei Dächern mit grossen Spannweiten angewendet. Ein Vorteil gegenüber dem Tragwerk der Hängebrücken besteht darin, dass die abgespannten Tragwerke *viel weniger empfindlich auf ungleichmässig verteilte Nutzlasten* reagieren, wird die Last doch gemäss Bild 8.14 in jeder beliebigen Position auf direktem Weg zu den Auflagern abgetragen.

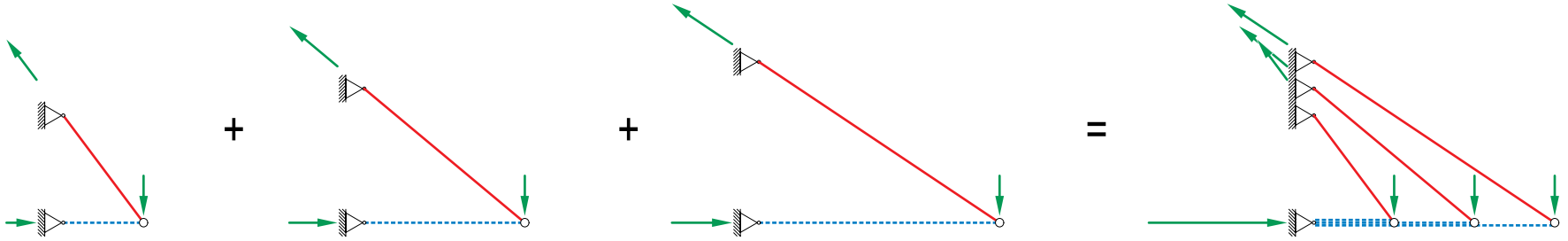


Bild 8.14: Überlagerung von Konsolen zu abgespannten Tragwerken

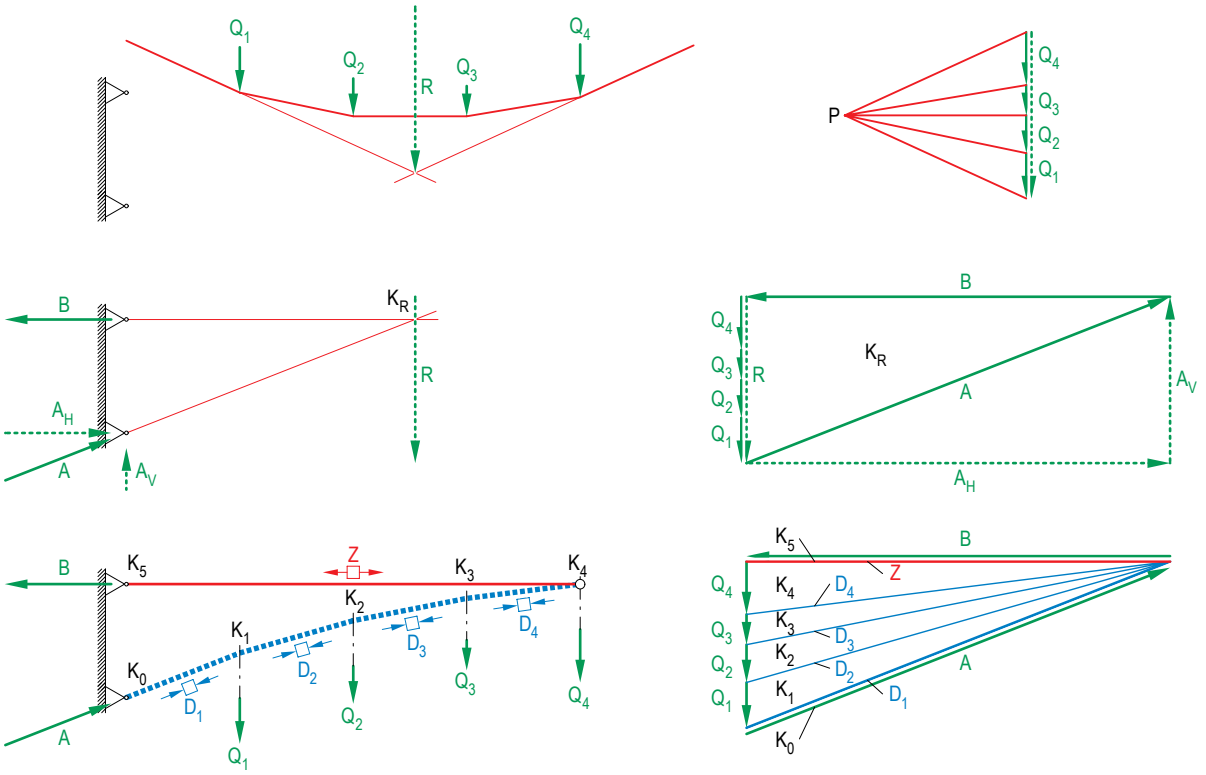


Bild 8.17: Konsolenartiges Bogen-Seiltragwerk unter parallelen Lasten

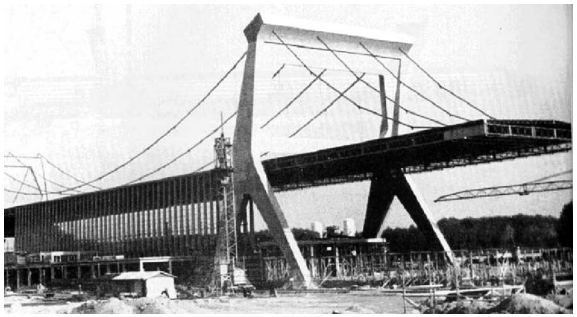


Bild 8.18: Endfeld der Papierfabrik Burgo, Mantua, 1961-62, Arch. & Ing.: Pier Luigi Nervi

Eine grundlegend andere Möglichkeit, mehrere Einzellasten oder auch verteilte Lasten mit Bogen-Seiltragwerken aufzunehmen, besteht darin, das Druckelement und/oder das Zugelement polygonal zu formen bzw. zu krümmen. Im Bild 8.17 ist eine entsprechende Lösung mit einem gekrümmten Druckstab, d.h. einem Bogen, dargestellt. Es ist ersichtlich, dass die Lösung sinngemäss nach dem gleichen Verfahren erfolgt, welches bereits zur Lösung der über zwei Auflager gespannten Bogen-Seilttragwerken angewendet wurde (Bild 8.9 respektive 8.10). Das Endfeld der in Kapitel 3 behandelten Papierfabrik Burgo ist ein Beispiel für ein konsolenartiges Bogen-Seiltragwerk (Bild 8.18). Die Dachplatte ist mit sekundären vertikalen Hängeseilen an den Tragseilen aufgehängt und dient gleichzeitig als Druckglied.

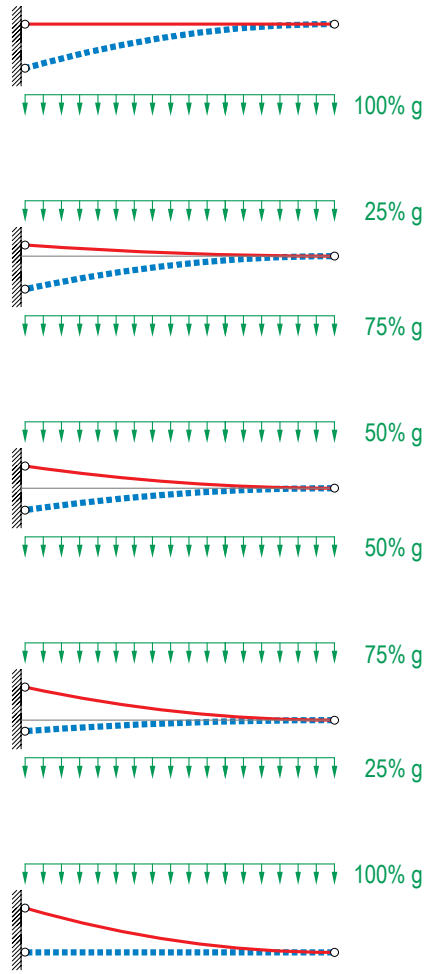
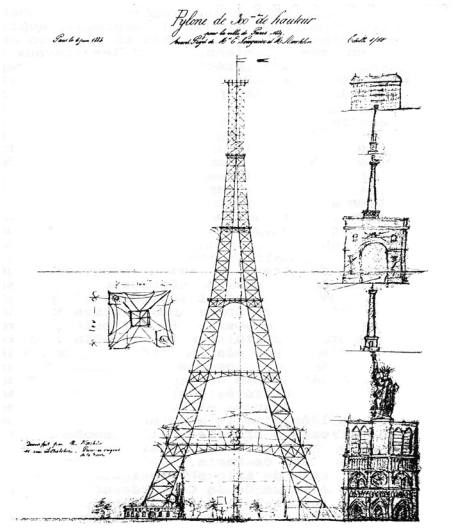


Bild 8.19: Aufteilung der äusseren Lasten auf die Tragelemente

Auch bei der Konsole unter gleichmässig verteilten Lasten nimmt der Bogen bzw. das Seil die Form einer Parabel an, also einer Kurve zweiter Ordnung (Bild 8.20). Die Lösung kann wie bei den zwischen zwei Auflagern gespannten Bögen oder Seilen elegant auf der Basis der doppelten Pfeilhöhe hergeleitet werden.

Beispiele für Konsolen unter gleichmässig verteilten Lasten sind Türme. Diese tragen horizontal wirkende Wind- oder Erdbebenkräfte als vertikale Konsolen ab. Der Entwurf der Form des Eiffelturms erfolgte nach diesem Prinzip, wobei das Ziel verfolgt wurde, ein möglichst transparentes Tragwerk zu erhalten (Bild 8.21). Der Ingenieur Maurice Koechlin (1856-1946), welcher zuerst die Form des Turms vorschlug, hat diese auf der Grundlage der zuvor beschriebenen Überlegungen entwickelt. Er erhielt dafür im Jahr 1884 ein Patent und führte in der Folge die Projektleitung als Chefingenieur des Büros Eiffel durch.



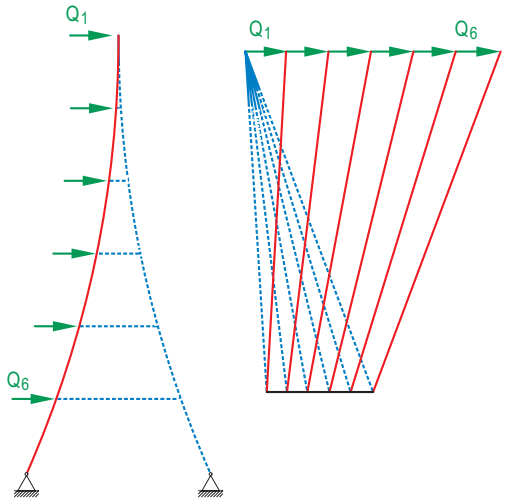


Bild 8.21: Entwurfsüberlegungen für den Eiffelturm, Paris, 1887-89, Arch.: Büro Eiffel, Ing.: Maurice Koechlin

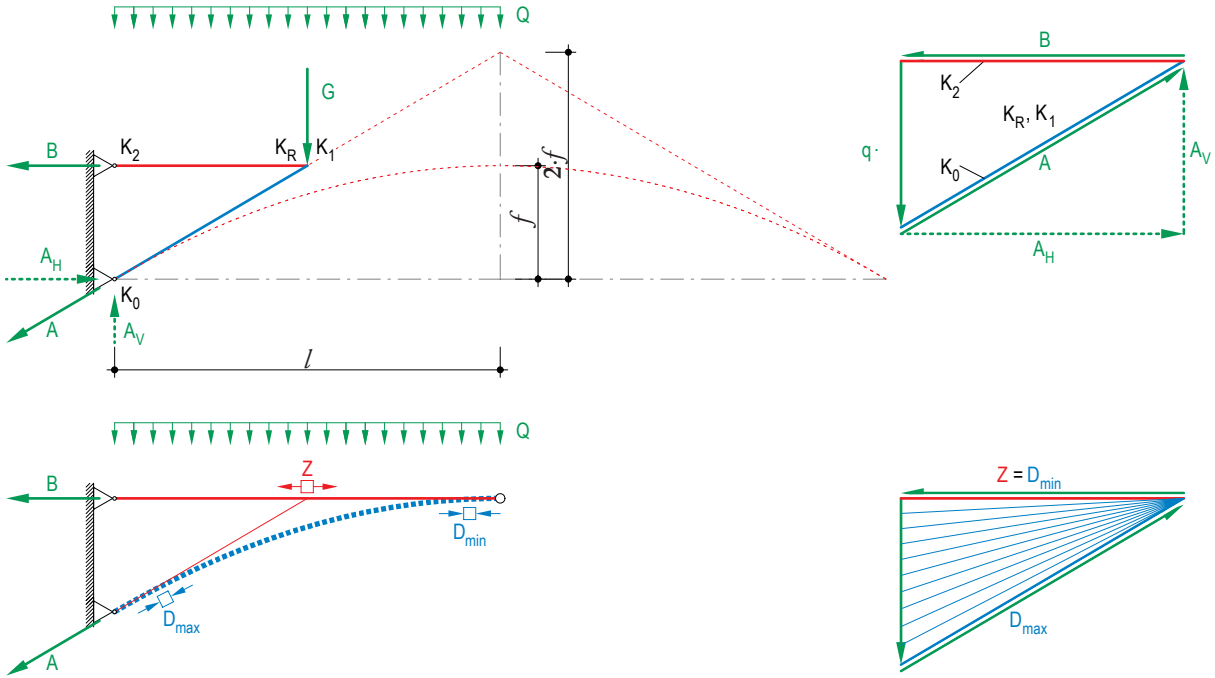


Bild 8.20: Konsolenartiges Bogen-Seiltragwerk unter verteilten Lasten

Wie bei den einfachen Bogen-Seiltragwerken gilt auch bei den Konsolen, dass eine ganze Familie von Tragwerken, je nach Anteil der Aufnahme der Lasten durch das Seil bzw. durch den Bogen, ausgebildet werden kann (Bild 8.19). Die Aufteilung der abzutragenden Lasten auf das Bogen- und Seiltragwerk erfolgt wie bei einem einfachen Bogen-Seiltragwerk in Abhängigkeit von der Pfeilhöhe (vgl. Bild 8.5). So übernimmt beim Bogen mit Zugglied der Bogen selbstverständlich 100% der Lasten, während bei einem System, bei welchem die Pfeilhöhe des Bogens dreimal so gross ist wie diejenige des Seiles, der Bogen 75% und das Seil 25% der Lasten übernimmt.

8.5 Zusammengesetzte Bogen-Seiltragwerke

Über zwei Auflager gespannte Bogen-Seiltragwerke mit einer Auskragung

Zunächst soll ein Tragwerk untersucht werden, welches zwei Auflager überbrückt und zusätzlich bei einem Auflager konsolartig auskragt. In einem ersten Schritt wird angenommen, es wirke nur eine Einzellast am Ende der Konsole. Wie aus dem Bild 8.22a ersichtlich ist, ist die Lösung sehr einfach: es handelt sich, was die inneren Kräfte anbelangt, um ein auf den Kopf gestelltes einfaches Bogen-Seiltragwerk, welches zwei Auflager überspannt und eine einzige Last, nämlich die rechte Auflagerkraft trägt (Bild 8.22b)! Es ist zu beachten, dass beim im Bild 8.22a dargestellten Tragwerk das auf der zur Konsole entgegengesetzten Seite liegende Auflager vom Boden abhebt, wenn es nicht festgehalten wird. Die Auflagerkraft *A* ist somit nach unten gerichtet.

Aus dieser Feststellung folgt eine weitere, verblüffende Erkenntnis: nicht nur das untersuchte überspannende und auskragende Ausgangstragwerk, sondern auch jedes zwei Auflager überspannende Bogen-Seiltragwerk kann als Zusammensetzung von (mindestens) zwei Konsolen interpretiert werden. Die Konsole ist somit das eigentliche Grundelement der Bogenseiltragwerke, und wie in den Kapiteln 10 und 12 gezeigt wird, auch der Fachwerke und der Balken.

In einem zweiten Schritt sollen zusätzlich zur äusseren Last weitere Lasten zwischen den beiden Auflagern wirken. Da in diesem Tragwerksbereich sowohl das Seil als auch der Bogen infolge der äusseren Last auf der Konsole bereits innere Kräfte aufweisen, können weitere Lasten aufgenommen werden, indem mindestens eines dieser beiden Elemente einen polygonalen bzw. gekrümmten Verlauf annimmt. Da die Kraft in den entsprechenden Elementen bereits festliegt, kann die

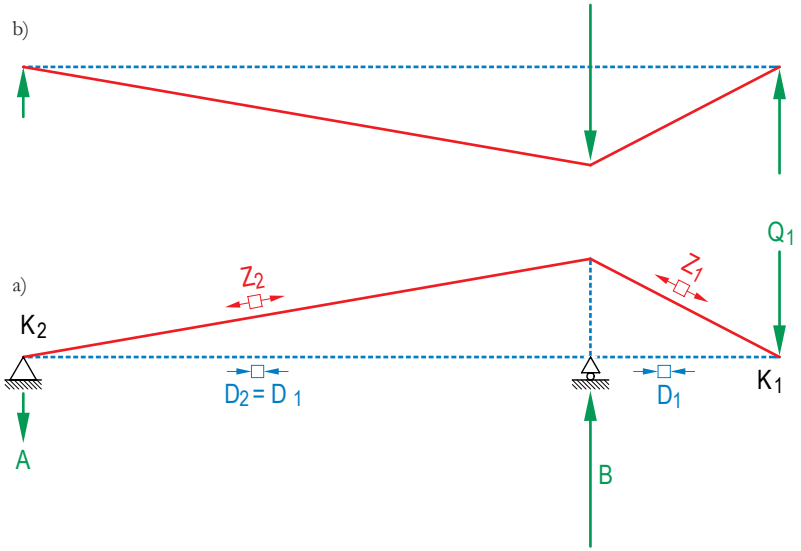


Bild 8.22: Über zwei Auflager gespanntes Bogen-Seiltragwerk mit belasteter Auskragung (a) und alternatives Tragwerk mit identischen inneren Kräften (b)

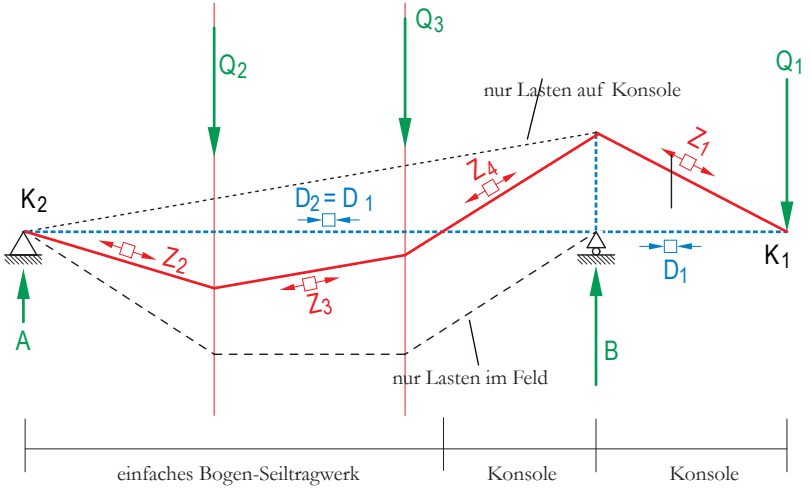
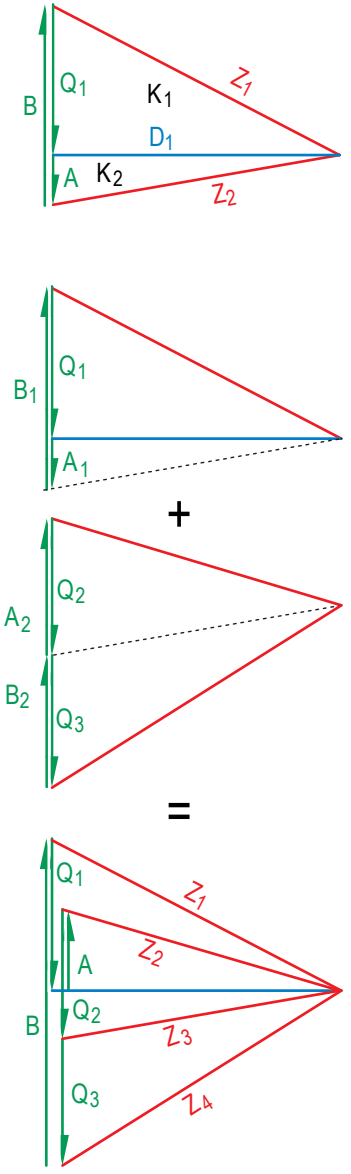


Bild 8.23: Über zwei Auflager gespanntes Bogen-Seiltragwerk mit belasteter Auskragung unter drei Lasten



Pfeilhöhe nicht frei gewählt werden, sondern sie ergibt sich eindeutig aus dem Kräfteplan. Im Bild 8.23 ist eine entsprechende Lösung dargestellt.

Über zwei Auflager gespannte Bogen-Seiltragwerke mit zwei Auskragungen

Falls an beiden Enden des einfachen Bogen-Seiltragwerkes eine Auskragung vorhanden ist, kann analog vorgegangen werden wie im Fall einer Auskragung. Im Bild 8.25 sind zusammengesetzte Bogen-Seiltragwerke für verschiedene Verhältnisse l'/l unter einer gleichmässig verteilten Last dargestellt. Dabei wird mit l' die Länge der Konsole bezeichnet und mit l diejenige des einfachen Bogen-Seiltragwerks. Der Verlauf des Bogens bzw. des gekrümmten Seiles ist im Feld immer gleich, d.h. die Pfeilhöhe f bleibt konstant, so dass auch die Kraft im horizontalen Zugglied bzw. im horizontalen Druckglied für alle dargestellten Beispiele gleich ist. In den fünf abgebildeten Beispielen variiert die Länge l' der Konsole. Die Konsole bewirkt eine Unterteilung der Pfeilhöhe in einen Teil in Feldmitte und einen Teil über den Auflagern.

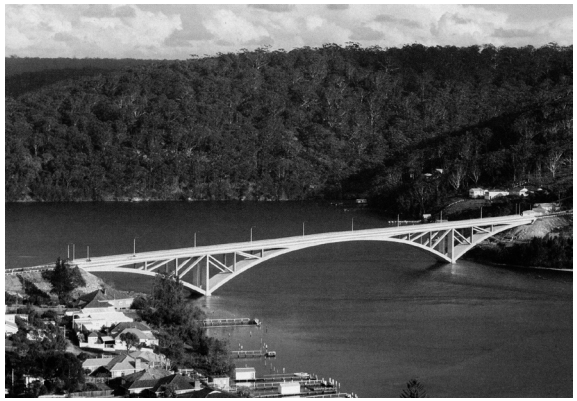


Bild 8.24: Rip Bridge, Woy Woy, 1974, Arch.: Donald Charles, Ing.: Albert Freid

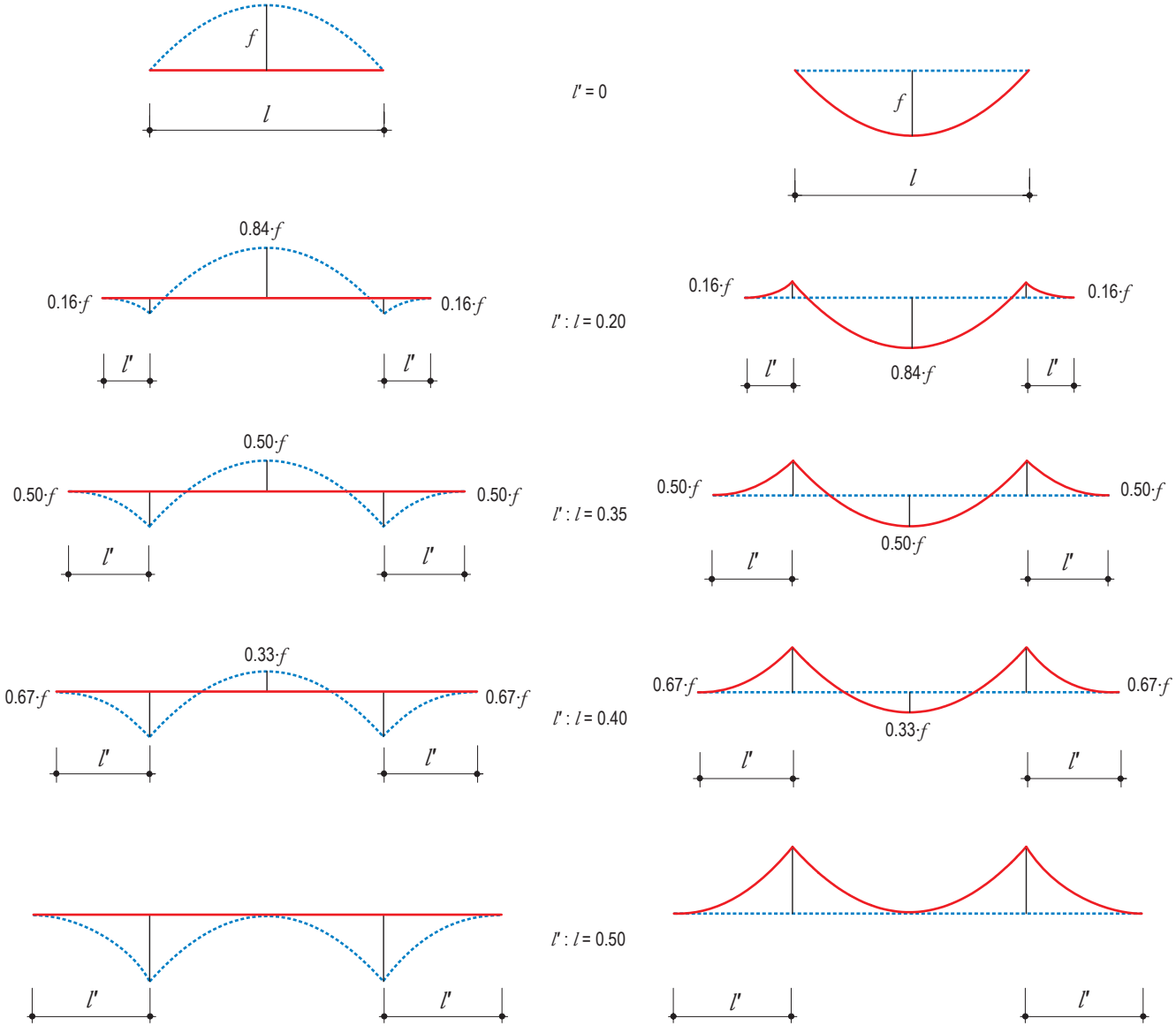


Bild 8.25: Über zwei Auflager gespanntes Bogen-Seiltragwerk mit zwei Auskragungen

Wenn l' die Hälfte der Spannweite l erreicht, befindet sich der Bogen überall unterhalb des Zugglieds: dieser Spezialfall kann als vier Konsolen interpretiert werden, welche sich paarweise im Gleichgewicht halten.

Bei der Rip-Bridge nahe Sydney wurde gerade diese Tragwerksart mit Bogen und Zugglied angewendet (Bild 8.24). Die vertikalen und diagonalen Streben haben dabei die Aufgabe, das Tragwerk unter veränderlichen Lasten zu stabilisieren. Als duale Lösung hierzu, also mit Seil und Druckglied ist wiederum Nervis Papierfabrik Burgo zu erwähnen (Bilder 3.12 & 8.20).

Auch in der Natur ist diese Tragwerksart verbreitet. So stellt D'Arcy W. Thompson (1860-1948) in seiner 1917 veröffentlichten Arbeit *Über Wachstum und Form* fest, dass viele Organismen der Tierwelt Formen aufweisen, welche dem Verlauf der statischen Beanspruchungen folgen. Insbesondere die Vierbeiner, sowohl die Säugetiere als auch die Reptilien, können vom statischen Standpunkt als Bogen-Seiltragwerke mit zwei Konsolen, nämlich dem Kopf und dem Schwanz, angesehen werden. Thompson stellt die statisch erforderlichen Bogen-Seiltragwerke verschiedener Vierbeiner dar und beschreibt ihre Analogie mit der tatsächlichen Form der Tiere (Bild 8.26).

Diese Analogien sind in Übereinstimmung mit der Evolutionstheorie: bei zunehmender Beanspruchung des ‚Feldbereichs' entwickelt sich das Lebewesen weiter, indem es die Höhe seines ‚Tragwerks' anpasst so dass die Knochen, welche die inneren Druckkräfte aufnehmen, und die auf Zug beanspruchten Sehnen nicht überbeansprucht werden. Eine Tierart ist somit in der Lage seine eigene Effizienz zu erhöhen und dadurch seine Überlebenswahrscheinlichkeit zu vergrössern.

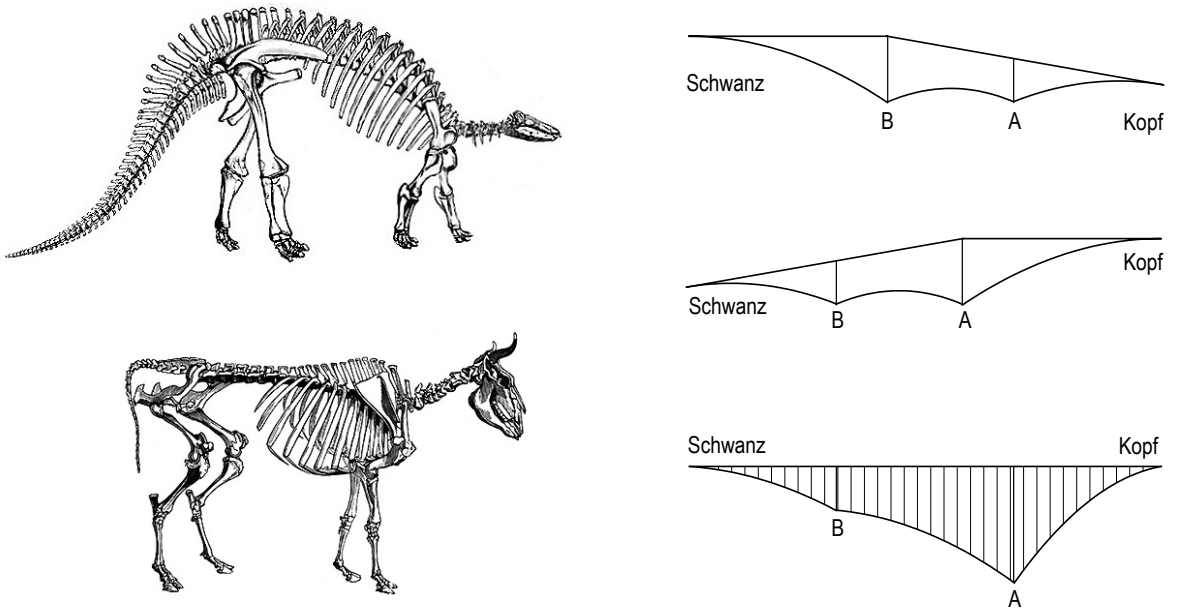


Bild 8.26: Darstellung nach D'Arcy W. Thompson eines Dinosauriers mit langem und schwerem Schwanz (Stegosaurus), für ein Pferd oder ein Rind und für einen Vierbeiner mit langem Hals und schwerem Kopf (Titanotherium)

Über mehrere Felder verlaufende Bogen-Seiltragwerke

Die einfachste Lösung, um mehrere Felder zu überspannen, besteht darin, einfache Bogen-Seiltragwerke eines neben dem anderen anzuordnen (Bild 8.27). Bei der dargestellten Brücke ist die Fahrbahnplatte, welche als Zugglied wirkt, kräftig ausgebildet, so dass sie als Versteifungsträger zur Stabilisierung des Tragwerks unter veränderlichen Lasten dienen kann. Die Zugglieder können auf zwei verschiedene Arten interpretiert werden: jedes einzelne Zugglied kompensiert die horizontalen Auflagerkräfte der einzelnen Bögen, oder das Zugband läuft durch das gesamte Tragwerk durch und kompensiert nur die horizontalen Auflagerkräfte der äusseren Felder. Bei den Zwischenauflagern kompensieren sich in diesem Fall die Horizontalkomponenten der Bogenkräfte gegenseitig, was bedeutet, dass das Zuglied bei den Zwischenauflagern nicht zwingend mit den Bögen verbunden werden muss.

Eine elegantere Lösung besteht darin, das Prinzip des Bogen-Seiltragwerkes mit Konsolen anzuwenden. Ein-

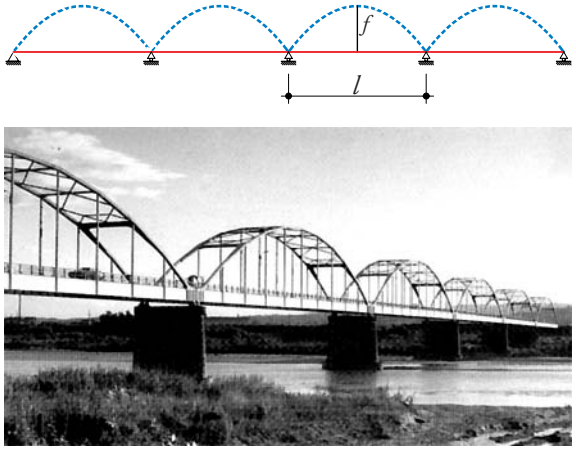


Bild 8.27: Serie von einfachen Bogen-Seiltragwerken

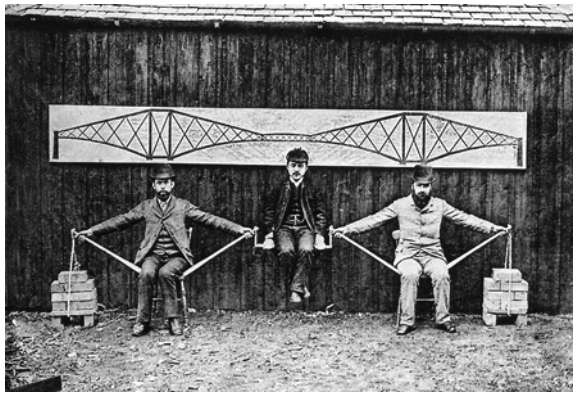
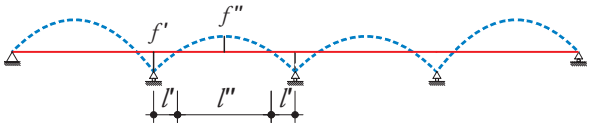


Bild 8.28: Demonstration des Prinzips eines Gerber-Trägers

fache Bogen-Seiltragwerke mit kürzeren Spannweiten stützen sich auf Konsolenpaare ab, welche symmetrisch zur Auflagerachse angeordnet sind (Bild 8.28). Die entsprechende Tragwirkung wird als Durchlaufwirkung bezeichnet. Dort wo sich im Feld Seil und Bogen kreuzen, können Gelenke angeordnet werden.

Diese Tragwerke werden als Gerber-Träger bezeichnet nach dem Ingenieur Heinrich Gottfried Gerber (1832-1912), der sie im Jahr 1866 patentiert und ein Jahr später als erste Anwendung die Mainbrücke in Hassfurt projektiert hat (Bild 8.29). Bei dieser Brücke sind Seil



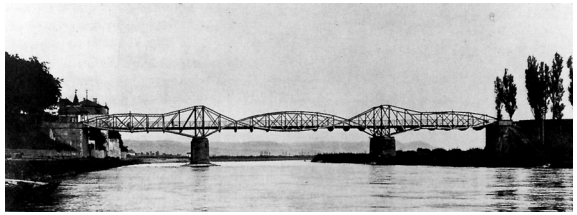


Bild 8.29: Mainbrücke, Hassfurt, 1867, Arch. & Ing.: Heinrich Gottfried Gerber

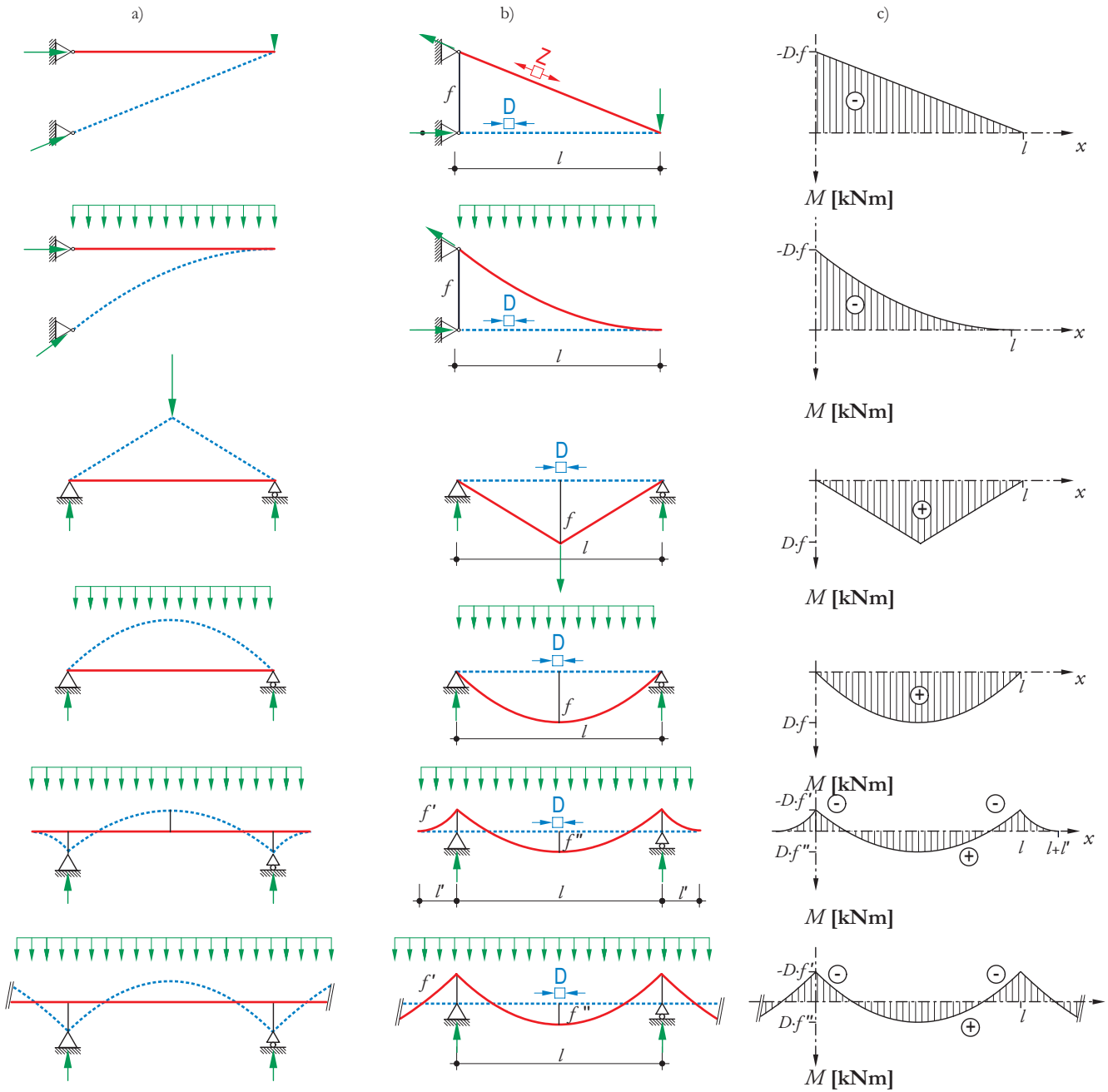


Bild 8.30: Zusammenstellung von Bogen-Seiltragwerken mit gekrümmtem Druckglied und geradem Seil (a) mit gekrümmtem Seil und geradem Druckglied (b) und dem Verlauf des Biegemoments (c)

und Bogen im mittleren Feld symmetrisch zur Längsachse angeordnet, das heisst Seil und Bogen weisen die gleiche Krümmung auf. Die vertikalen und diagonalen Streben haben die Aufgabe, das Tragwerk unter veränderlichen Lasten zu stabilisieren. Mit der gleichen Zielsetzung folgt in den Randfeldern die Formgebung von Seil und Bogen nicht vollständig derjenigen des Bogen-Seiltragwerks. Hier müssten sich der Bogen und das Seil kreuzen; dies würde jedoch zu einem unter veränderlichen Lasten labilen Tragwerk führen.

Im Bild 8.30 ist zusammenfassend eine Auswahl von Bogen-Seiltragwerken dargestellt, gegliedert nach Tragwerken mit Bögen und geraden Seilen (Bild 8.30a) und nach Tragwerken mit gekrümmten Seilen und geraden Druckgliedern (Bild 8.30b). Im Bild 8.30c ist das Produkt der inneren Druckkraft D im Druckglied mit dem rechtwinklig zur Druckgliedachse abgetragenen Abstand z des Seils vom Druckglied in Diagrammen dargestellt. Dieses Produkt wird von den Bauingenieuren als *Biegemoment* bezeichnet und hat die Einheit [kN·m]. Im dargestellten Spezialfall eines horizontalen Druckglieds stimmt die Form des Seils somit mit dem Kurvenverlauf der Biegemomentlinie überein.

Der Betrag des Biegemomentes kann dank der Dualität der Seil- und Bogentragwerke ebenfalls aus den im Bild 8.30a dargestellten Tragwerken mit horizontalen Seilen gewonnen werden. Das Biegemoment ist nur von der Geometrie der Auflager und von den äusseren Kräften, nicht aber von der Tragwerksart selber abhängig. Wählt man beispielsweise beim Bogen-Seiltragwerk eine grössere Pfeilhöhe, so resultiert eine geringere innere Druckkraft im Druckglied, so dass das Produkt $D \cdot z$ bzw. $D \cdot f$ tatsächlich unverändert bleibt.

Die erste Ableitung des Biegemomentes nach der Längskoordinate x entspricht an jedem Ort der Summe der Vertikalkomponenten der inneren Kräfte im Seil und im Druckglied. Die entsprechende Grösse wird von den Bauingenieuren als *Querkraft* bezeichnet und besitzt die Einheit [kN]. Auch die Querkraft ist nur von der Geometrie der Auflager und von den äusseren Kräften, nicht aber von der Tragwerksart selber abhängig.

Sowohl Biegemoment als auch Querkraft sind für die analytische Statik geeignete Hilfsgrössen; im Rahmen der graphischen Statik haben sie dagegen keine Bedeutung und werden in diesem Manuskript nicht weiter verwendet.

Literaturverzeichnis

Mechanik und Statik der Tragwerke; Analyse

- Pizzetti, G.: *Principi statici e forme strutturali*, UTET, Torino, 1980

Qualitatives und intuitives Verständnis des Verhaltens der Tragwerke; Konzepte

- Gordon, J. E.: *Structures, or why things don't fall down*, Plenum Press, New York, 1978 (Italienische Ausgabe: *Strutture, ovvero perché le cose stanno in piedi*, Mondadori, Milano, 1979)
- Gordon, J. E.: *The science of Structures and Materials*, Scientific American Books, New York, 1988 (Italienische Ausgabe: *Strutture sotto sforzo, Zanichelli*, Bologna, 1991)
- Nervi, P. L.: *Construire correttamente*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1965 (Französische Ausgabe: *Savoir costruire*, Le Linteau, Paris, 1997)
- Salvadori, M.; Heller, R.: *Structures in Architecture*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 1963 (Französische Ausgabe: *Structures et Architecture*, Eyrolles, Paris, 1976; Italienische Version: *Le strutture in architettura*, Etaslihbri, Milano, 1992)
- Torroja Miret, E.: *Razon y ser de los tipos structurales*, 1957 (jüngste Ausgabe: *Consejo Superior de Investigationes Cientificas*, Madrid, 2000; Französische Ausgabe: *Les structures architecturales, leur conception, leur réalisation*, Eyrolles, Paris, 1969)

Konzept auf grafischer Statik basierend

- Muttoni, A.: *L'art des structures*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2004
- Wolfe, W. S.: *Graphical Analysis*, Wexford College Press, 2006
- Zalewski, W.; Allen, E.: *Shaping Structures: Statics*, Ed. John Wiley and Sons, New York, 1998

Synergien zwischen Gestaltung und Tragwerk

- Ackermann, K.: *Tragwerke in der konstruktiven Architektur*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1988
- Billington, D. P.: *The Tower and the bridge, the new art of structural engineering*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983
- Deswarte, S.; Lemoine, B.: *L' architecture et les Ingénieurs*, Le Moniteur, 1997
- Mark, R.: *Light, Wind and Structure*, MIT Press, 1990
- Moch, E. B.: *The architecture of Bridges*, The Museum of Modern Art, New York, 1949
- Picon, A.: *L'art de l'ingénieur*, constructeur, entrepreneur, inventeur, Editions du Centre Pompidou/Le Monitor, Paris, 1997
- Robbin, T.: *Engineering a New Architecture*, Yale University Press, New Hawen and London, 1996
- Siegel, C.: *Strukturformen der modernen Architektur*, Callwey, München, 1960

Tragwerksarten

- Angerer, F.: *Bauen mit tragenden Flächen*, Callwey, München, 1960
- Heinle, E.; Leonhardt, F.: *Türme aller Zeiten, aller Kulturen*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1990
- Heinle, E.; Schlaich, J.: *Kuppeln aller Zeiten, aller Kulturen*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996
- Ishii, K.: *Membrane Structures in Japan*, SPS Publishing Company, Tokyo, 1995
- Joedicke, J.: *Schalenbau*, Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1962
- Leedy, W. C.: *Le volte a ventaglio*, Le Scienze, Milano, April 1983
- Leonhardt, F.: *Brücken/Bridges, Ästhetik und Gestaltung, Aestetics and Design*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1982
- Mierop, C.: *Skyscrapers, higher and higher*, Norma, Paris, 1995
- Otto, F.: *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Ullstein Verlag, 1966
- Rice, P.; Dutton, H.: *Le verre structurel*, Le Moniteur, Paris, 1995 (Deutsche Ausgabe: *Transparente Architektur, Glasfassaden mit Structural Glazing*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995)
- Stock, W. J.: *Europäischer Kirchenbau 1950-2000*, Pestel Verlag München Berlin London New York, 2003
- Van Beek, G. W.: *Archi e volte nell' antico Vicino Oriente*, Le Scienze, Milano, September 1987

Überlegungen von Ingenieuren und Architekten

- Diethlem, A.: *Picture Window House, Japan - Leben wie im Landschaftsbild*, steel doc 03/04
- Freyssinet, E.: *Un amour sans limite*, Editions du Linteau, Paris, 1993
- Nervi, P. L.: *Scienza o arte del construire?*, 1945, (Jüngste Ausgabe: *Cittàstudi Edizioni*, Milano, 1997)
- Nervi, P. L.: *Nuove strutture*, Edizioni di Comunità, Milano, 1963
- Piano, R.: *Giornale di bordo*, Passigli Editore, Firenze, 1997
- Rice, P.: *An Engineer imagines*, Artemis, London, 1994
- Wachsmann, K.: *Wendepunkt im Bauen*, Rowohlt, 1962

Ingenieure und Architekten

- Bill, M.: *Robert Maillart*, Artemis Verlag, Zürich, 1949
- Billington, D. P.: *Robert Maillart's Bridges, the art of engineering*, Princeton University Press, New Jersey, 1979
- Boaga, G.: *Ricardo Morandini*, Zanichelli Editore, Bologna, 1984
- Brownlee, D. B.; De Long, D. G.: *Louis I. Kahn: in the realm of archtecture*, Museum of contemporary Art, Los Angeles, 1991
- Buchanan, P.: *Renzo Piano Building Workshop*, Phaidon, London, 1993-1998
- Candela, F.; Segui Buenaventura, M.: *Felix Candela, arquitecto*, Ausstellungskatalog, Istituto Juan de Herrera, Madrid, 1994
- Desideri, P.: *Pier Luigi Nervi*, Zanichelli, Bologna, 1979 (Deutsch/Französische Ausgabe: *Pier Luigi Nervi*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1982)
- Dieste, E.: *Eladio Dieste 1943-1996*, Junta de Andalucia, Sevilla, 1998
- Dini, M.: *Renzo Piano*, Electa, Milano, 1983
- Dunster, D.: *Arups on Engineering*, Ernst&Sohn, Berlin, 1996
- Fernandes Ordonez, S. A.: *Eugène Freyssinet*, 2C Editions, Barcelona, 1979
- Fernandes Ordonez, S. A.; Navarro Vera, J. R.: *Eduardo Torroja, Ingenero*, Ediciones Pronaos, Madrid, 1999
- Guidot, R.; Guiheux, A.: *Jean Prouvé, constructeur*, Editions du Centre Pompidou, Paris, 1990
- Holgate, A.: *The art of structural engineering the work of Jörg Schlaich and his team*, Axel Menges, Stuttgart, 1997
- Imbesi, G.; Morandini, M.; Moschini, F.: *Riccardo Morandini, Innovazione, Tecnologia, Progetto*, Gangemi Editore, Roma, 1995
- Killer, J.: *Die Bauwerke der Baumeister Grubenmann*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1985
- Loyrette, H.: *Gustave Eiffel*, Deutsche Verlags-Anstalt, Fribourg, 1985
- Marrey, B.: *Nicolas Esquillan, un ingénieur d'enterprise*, Picard éditeur, Paris, 1992
- Nardi, G.: *Angelo Mangiarotti*, Maggioli Editore, Rimini, 1997
- Pawley, M.: *Norman Foster*, Rizzoli, Milano, 1999 (Englische Ausgabe: *Norman Foster*, Thames&Hudson, London, 1999)
- Pedretti, C.: *Leonardo Architetto*, Electa, Milano, 1999
- Pfeiffer, B. B.: *Frank Lloyd Wright*, Taschen, Köln, 1991
- Polano, S.: *Santiago Calatrava*, Electa, Milano, 1996 (Deutsche Ausgabe: *Santiago Calatrava*, Deutsche Verlags-Anstalt, München, 1997)
- Ramm, E.; Schunk, E.: *Heinz Isler – Schalen*, Krämer, 1986
- Rui-Wamba, J. et al.: *Eugène Freyssinet, Un ingeniero revolucionario*, Fundacion Esteyco, 2003
- Schulze, F.: *Mies van der Rohe*, Museum of Modern Art, New York, 1989
- Stüssi, F.: *Othmar H. Amman, Sein Beitrag zur Entwicklung des Grossbrückenbaus*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1974
- Suchov, V.; Graefe, R.; Gappoev, M.; Pertschi, O.: *Die Kunst der sparsamen Konstruktion*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1992
- Villa, A.: *Silvano Zorzi*, Electa, Milano, 1995
- Von der Mühl, H. R.: *Kenzo Tange*, Zanichelli, Bologna, 1981

Geschichte der Konstruktion

- Adam, J.-P.: *La construction romaine, matériaux et techniques*, Picard, Paris, 1984 (Italienische Ausgabe: *L'arte di construire presso i romani, materiali e tecniche*, Longanesi, Milano, 1988)
- Jesberg, P.: *Die Geschichte der Ingenieurbaukunst*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996
- Lamprecht, H.-O.: *Opus caementitium, Bautechnik der Römer*, Beton-Verlag, Düsseldorf, 1984
- Peters, T. F.: *Transition in engineering, Guillaume Henri Dufour and early 19th century cable suspension bridges*, Birkhäuser, Basel, 1987

In diesem Band behandelte Tragwerke

- Boesiger, W.: *Le Corbusier Œuvre complete, 1952-1957*, Les Editions d' Architecture, Zürich, 1970
- De Bures, C.: *La tour de 300 mètres*, Editions André Delcourt, Paris, 1998
- Eggen, A. P.; Sandaker, B. N.: *Stahl in der Architektur*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996
- Lyall, S.: *Masters of Structures*, Kohlhammer, Stuttgart, 2002
- Saarinen, E.: *Il terminal dell' aeroporto internazionale Dulles*, Jaca Book, Milano, 1994
- *The Golden Gate Bridge*, Highway and transportation district, San Francisco, 1937/1987
- Thompson, D'Arcy W.: *Über Wachstum und Form*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1973
- Vischer, J.; Hilbersheimer, L.: *Beton als Gestalter*, Julius Hofmann, Stuttgart, 1928

Vorwort

Der vorliegende Einführungskurs in die Thematik der Tragwerke wurde für die beiden ersten Semester des Architekturstudiums entwickelt. Er wird in den weiteren Semestern fortgesetzt, in welchem die Tragwerke in Stahlbeton, Stahl, Holz, Mauerwerk sowie das Tragwerk Baugrund detaillierter behandelt werden. Dieser zweite Band *Tragwerksentwurf 2* beinhaltet den im 2. Semester behandelten Vorlesungsstoff, und ist als Einheit mit dem ersten Band *Tragwerksentwurf 1* zu verstehen, welcher den Stoff des 1. Semesters beinhaltet.

Der Kurs basiert auf dem Buch *L'Art des Structures* von Prof. Dr. Aurelio Muttoni. Es handelt sich um eine vom Üblichen abweichende Methode, welche als Hauptwerkzeug die graphische Statik einsetzt. Das Vorgehen ermöglicht es, auf elegante Art und Weise die inneren Kräfte zu visualisieren, und fördert das Gefühl für die Zusammenhänge zwischen der zweckmässigen Form eines Tragwerkes und den wirkenden inneren Kräften. Der Schwerpunkt liegt somit stärker auf dem Tragwerksentwurf als auf der Tragwerksanalyse.

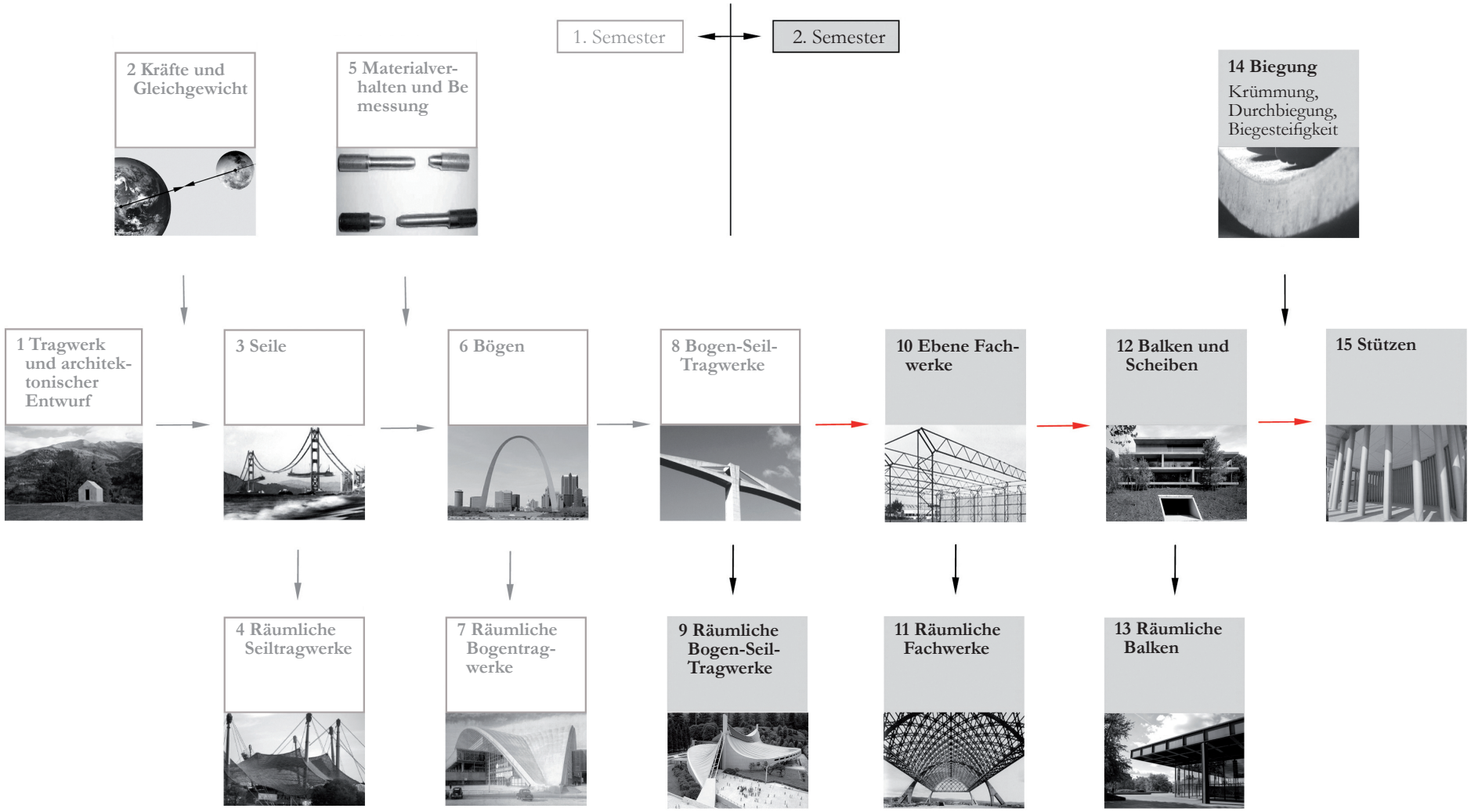
Um das Erreichen dieser Ziele zu erleichtern, wird vorwiegend ein intuitives Vorgehen befolgt. Der behandelte Stoff ist entlang eines Pfades organisiert. Nach der Einführung in die wesentlichen Grundlagen werden sukzessiv Seil- und Bogentragwerke, gemischte Bogen-Seiltragwerke, Fachwerke, Balken und schliesslich schlanke Stützen mit Hilfe der graphischen Statik behandelt. Im Anschluss an die Behandlung der jeweiligen, in der Ebene angeordneten Tragwerke, werden die Form und die Tragwirkung der artverwandten räumlichen Tragwerke beschrieben.

Der Kurs verfolgt somit das Ziel, eine wahre Statik für Architekten zu sein, und nicht eine Vereinfachung der Statik der Bauingenieure. Möge er allen Interessierten den Einstieg in die interessante Welt der Tragwerke erleichtern, den Dialog zwischen Architekten und Bauingenieuren fördern, und so zur Entwicklung von architektonischen Entwürfen beitragen, bei welchen die statischen und die gestalterischen Belange ineinander übergehen.

Bei der Konzeptfindung und Ausarbeitung des vorliegenden Manuskriptes wurde ich tatkräftig von meinem Oberassistenten Dr. Toni Kotnik unterstützt. An der Bearbeitung des Textes und der Bilder haben sich meine Assistierenden Gabriela Dimitrova, Lucienne Köpfli, Ali Kahrom und Maximilian Schrems beteiligt. Ihnen sowie Frau Ruth Schmid sei an dieser Stelle für ihre Unterstützung bestens gedankt.

Zürich, im Februar 2009

Prof. Dr. Joseph Schwartz


1. Semester
2. Semester
2 Kräfte und Gleichgewicht
5 Materialverhalten und Bemessung
14 Biegung
Krümmung, Durchbiegung, Biegesteifigkeit
1 Tragwerk und architektonischer Entwurf
3 Seile
6 Bögen
8 Bogen-Seil-Tragwerke
10 Ebene Fachwerke
12 Balken und Scheiben
15 Stützen
4 Räumliche Seiltragwerke
7 Räumliche Bogentragwerke
9 Räumliche Bogen-Seil-Tragwerke
11 Räumliche Fachwerke
13 Räumliche Balken

Inhalt

1 Tragwerk und architektonischer Entwurf
2 Kräfte und Gleichgewicht
3 Seile
4 Räumliche Seiltragwerke
5 Materialverhalten und Bemessung
6 Bögen
7 Räumliche Bogentragwerke
8 Bogen-Seiltragwerke

9 Räumliche Bogen-Seil-Tragwerke 1

9.1 Einfache räumliche Bogen-Seiltragwerke 1
9.2 Räumliche Bogen-Seiltragwerke mit Zug- und Druckringen 2
9.3 Räumliche Kombinationen von Bogen und Seilen 3
9.4 Tensegrity-Tragwerke 4

10 Ebene Fachwerke 7

10.1 Das Fachwerk als Kombination von Bogen-Seiltragwerken 7
10.2 Ermittlung der inneren Kräfte 8
10.3 Einfluss der Lage der äusseren Kräfte 9
10.4 Ermittlung der Gurtkräfte 10
10.5 Labile, statisch bestimmte und statisch unbestimmte Fachwerke 12
10.6 Geometrie der Fachwerke 13
10.7 Verschiedene Arten von Fachwerken 14
10.8 Weitere Fachwerkarten 19

11 Räumliche Fachwerke 23

11.1 Räumlich zusammengesetzte ebene Fachwerke 23
11.2 Raumfachwerke 24
11.3 Gewölbe und Kuppeln aus Fachwerken 25
11.4 Freie Formen aus Fachwerken 25

12 Balken und Scheiben 27

12.1 Tragverhalten eines einfachen Balkens 27
12.2 Einfache Tragwerke unter konzentrierten und verteilten Lasten 29
12.3 Zusammengesetzte Tragwerke 32
12.4 Rahmen 33
12.5 Scheiben 37

13 Räumliche Balken 39

13.1 Nebeneinander angeordnete Balken 39
13.2 Balkenroste 39
13.3 Platten 41
13.4 Faltwerke 42

14 Biegung 45

14.1 Biegung und Krümmung 45
14.2 Biegesteifigkeit 46
14.3 Verformung von auf Biegung beanspruchten Balken 49
14.4 Widerstand von auf Biegung beanspruchten Balken 51
14.5 Effizienz der Tragwerke 53

15 Stützen 57

15.1 Das Wesen des Instabilitätsproblems 57
15.2 Der Widerstand einer Stütze unter Druchbelastung 58
15.3 Einfluss der Länge der Stütze auf die kritische Last 59
15.4 Einfluss der Auflagerbedingungen der Stütze auf die kritische Last 59
15.5 Einfluss der Materialsteifigkeit der Stütze auf die kritische Last 61
15.6 Einfluss der Querschnittabmessungen der Stütze auf die kritische Last 61
15.7 Einfluss der Querschnittform der Stütze auf die kritische Last 62
15.8 Stützen mit veränderlichem Querschnitt 63
15.9 Beulen 63

Literatur 65

9 Räumliche Bogen-Seiltragwerke

Als räumliche Bogen-Seiltragwerke werden im Folgenden Tragwerke verstanden, welche aus räumlich angeordneten Druck- und Zugelementen bestehen und bei den Auflagern keine horizontalen Kraftkomponenten aufweisen. Es handelt sich somit um in sich geschlossene Tragwerke, deren Druck- und Zugelemente sowohl gerade als auch gekrümmt sein können.

Wie die Betrachtung des Tragverhaltens von Kuppeln deutlich macht, ist die Abgrenzung zu den räumlichen Bogen-Seiltragwerken zum Teil fliessend. So werden beispielsweise bei den Kuppeln die horizontalen Komponenten der Auflagerkräfte teilweise mit Hilfe von tangentialen Zugringen aufgenommen. Das heisst, dass die horizontalen Ringkräfte stets zu einer Kompensierung der Horizontalkomponenten der Tangentialkräfte beitragen (vgl. Abschnitt 7.4 und 7.5).

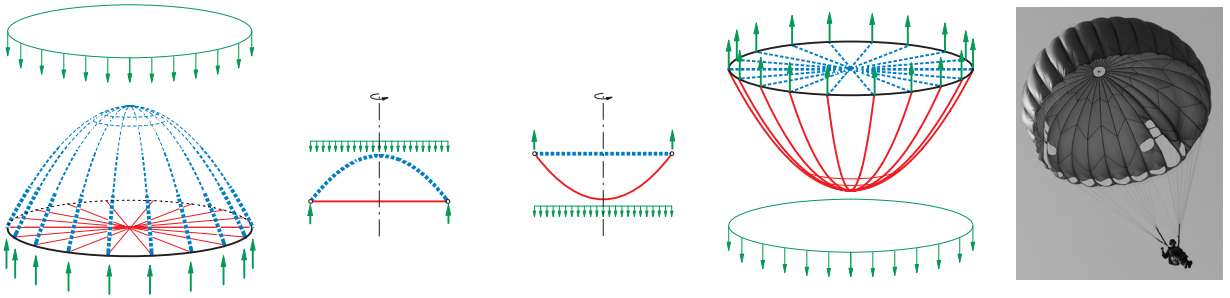


Bild 9.1: Tragwirkung einfacher, räumlicher Bogen-Seiltragwerke und Fallschirm als analoges Tragwerk

9.1 Einfache räumliche Bogen-Seiltragwerke

Gekrümmte räumliche Tragwerke wie zum Beispiel Membranen, Gewölbe, Kuppeln oder Schalen laufen häufig geneigt in die Auflager, so dass nebst den vertikalen auch horizontale Auflagerkräfte entstehen. Falls die Auflager nicht in der Lage sind, die Horizontalkomponenten der Auflagerkräfte aufzunehmen, können diese bei einer auf Zug beanspruchten Membran prinzipiell mit Hilfe mehrerer horizontaler Druckstäbe, respektive einer *Druckscheibe*, und bei überwiegend auf Druck beanspruchten Schalentragwerken mit Hilfe mehrerer horizontaler Seile, respektive einer *Zugmembran* aufgenommen werden (Bild 9.1). Diese aussteifenden Elemente übernehmen hierbei im Räumlichen die Rolle der Druckstrebe respektive des Zugseils in einfachen Bogen-Seiltragwerken (vgl. Abschnitt 8.1).

Rundkappenfallschirme weisen ein ähnliches Tragverhalten auf (Bild 9.1). Die Zugmembran des Fallschirms ist beansprucht durch die verteilte, nach oben gerichtete Auftriebskraft. Beim Erreichen der konstanten Fallgeschwindigkeit ist die Resultierende gleich null, d.h. die nach oben gerichteten Auftriebskräfte sind im Gleichgewicht mit der angehängten Last. Da sich das Gesamtsystem ohne Beschleunigung bewegt, liegt in diesem Fall ein dynamischer Gleichgewichtszustand vor. Am Rand des Fallschirms wirken die Seilkräfte, welche tangential an den Schirm anschliessen und dank ihrer Neigung sowohl die horizontalen als auch die vertikalen ‚Auflagerkräfte' der Fallschirmmembran aufnehmen.

Ein solches *Zusammenbinden der Auflagerkräfte* findet sich häufig bei Schalentragwerken, wobei das Zusammenführen der horizontalen Seilkräfte mit unter der Erde verlaufenden Kabeln oder Stahlbetonriegeln erfolgen kann. So werden beispielsweise beim Fächergewölbe des Centre des Nouvelles Industries et Technologies in Paris (Bilder 7.31 und 9.2) die Auflagerkräfte mit Hilfe von drei Seilen aufgenommen, welche die drei Auflager miteinander verbinden (Bild 9.2a). Diese Lösung ist statisch äquivalent mit der alternativen Lösung (Bild 9.2b), bei welcher die drei Seile in der Mitte mit-

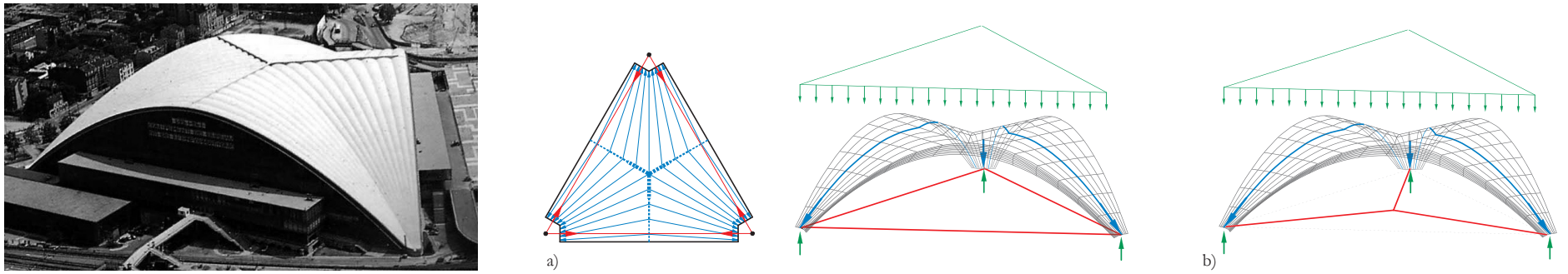


Bild 9.2: Centre des Nouvelles Industries et Technologies, Paris, 1956-58, Arch.: Robert Edouard Camelot, Jean de Mailly, Bernard Louis Zehrfuss, Ing.: Nicolas Esquillan (l=218 m, f=46 m) Schematische Dartstellung des Tragverhaltens (a) und Variante des Zusammenführens der horizontalen Seilkräfte (b)

einander verbunden sind. Diese Lösung würde dem in Bild 9.1 dargestellten Prinzip entsprechen, hat aber den Nachteil, dass die drei Seile im Zentrum des Grundrisses gekoppelt werden müssen.

9.2 Räumliche Bogen-Seiltragwerke mit Zug- und Druckringen

Wie am Beispiel des Centre des Nouvelles Industries et Technologies ersichtlich, und wie bei der Behandlung der Schalen bereits erwähnt (vgl. Bild 7.20), können die horizontalen Auflagerkräfte anstatt mit horizontalen, sternförmig verlaufender Seilen eleganter, nämlich mit einem *Zugring* aufgenommen werden (Bild 9.3). Dies gilt sinngemäss ebenfalls für Membranen. Diese Lösungen haben beim praktischen Tragwerksentwurf aus konstruktiver und architektonischer Sicht Vorrang gegegenüber der direkten Kopplung gemäss Bild 9.1.

Am Beipiel des Projektes der Überdachung des historischen Stadions Las Arenas in Barcelona (Bild 9.4) wird ersichtlich, wie mit Hilfe eines horizontalen Zugringes die horizontalen Auflagerkräfte der Druckbögen ins Gleichgewicht gebracht werden. Verglichen mit Nervis Kuppel des Palazzetto dello Sport in Rom (Bild 7.18),

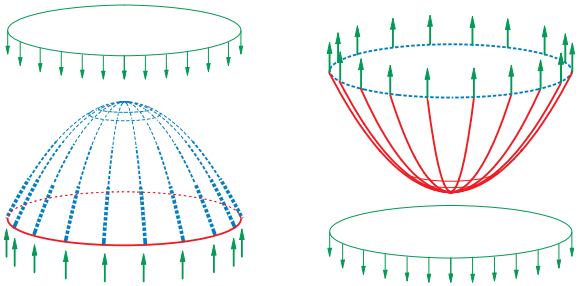


Bild 9.3: Aufnahme der horizontalen Auflagerkräfte mittels Zugring respektive Druckring



Bild 9.4: Umbau, Las Arenas, Barcelona, 2000-09, Arch.: Richard Rogers, Ing.: Expedition Engineering und BOMA (d=240 m)

bei welcher die Randstützen tangential zu den radialen Bögen verlaufen, sind hier die Randstützen vertikal, also in Richtung der verbleibenden vertikalen Auflagerkräfte angeordnet.

Eine Zugmembran mit *Druckring* ist häufig starken Formänderungen unter ungleichmässigen Nutzlasten unterworfen. Es ist deshalb zweckmässig, mit Hilfe einer gegenläufig gekrümmten, vorgespannten Membran diesen Formänderungen entgegen zu wirken. Ähnlich wie beim Seilbalken (Bild 3.17) entsteht so ein räumliches Tragwerk, bestehend aus zwei Membranen respektive zwei Seilscharen, deren horizontale Auflagerkräfte durch einen Druckring aufgenommen wird (Bild 9.5a). Die vertikale Lage der stabilisierenden Seilschar gegenüber der tragenden kann wie beim ebenen Seilbalken frei gewählt werden. Im Bild 9.5b ist eine alternative Lösung dargestellt, bei welcher die stabilisierende Seilschar oberhalb der tragenden angeordnet ist. In diesem Fall werden zwei Druckringe benötigt.

Ähnlich wie bei der in Bild 9.2 dargestellten Schale müssen auch bei aus Seilbalken bestehenden räumlichen Bogen-Seiltragwerken nicht alle Seile durch den zentralen Punkt geführt werden, sondern können alternativ mittels eines inneren Zugrings im Gleichgewicht gehal-

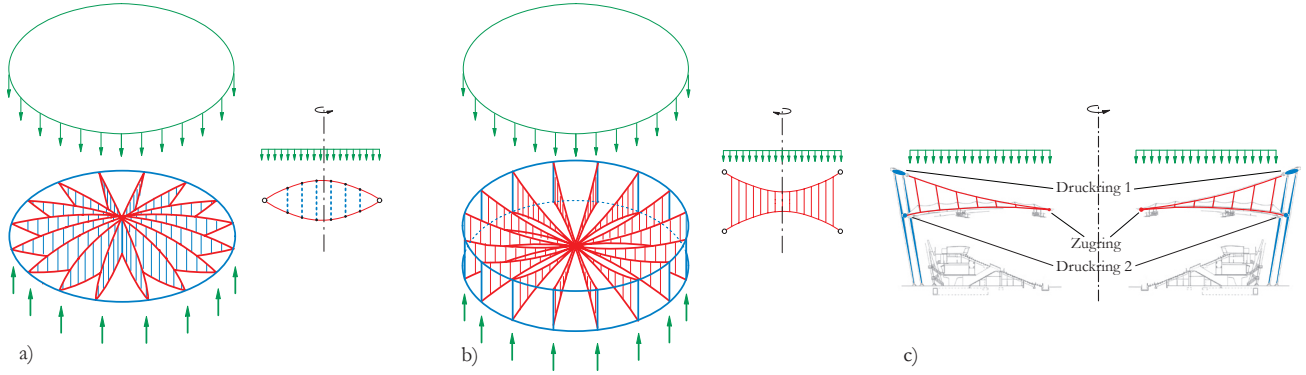
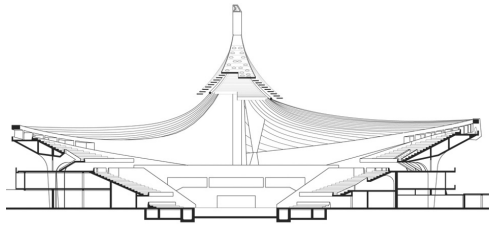
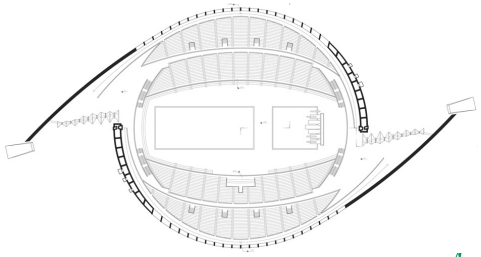


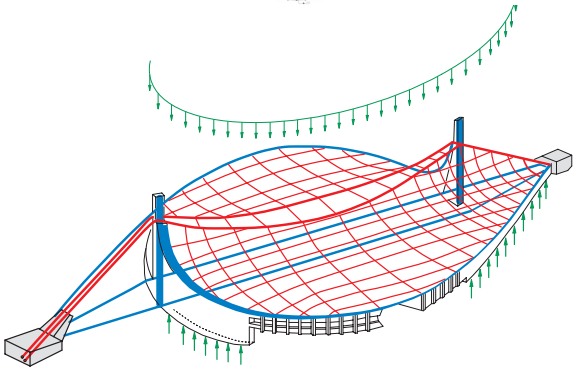
Bild 9.5: Aus Seilbalken bestehende Bogen-Seiltragwerke mit zwei Seilscharen und einem Druckring (a), mit zwei Druckringen (b) und Variante mit zwei Druckringen und einem zentralen Zugring in der Überdachung der Mercedes-Benz Arena (c)



Bild 9.6: Überdachung Mercedes-Benz Arena, Stuttgart, 1992-93, Arch.: asp Architekten, Ing.: Schlaich, Bergermann & Partner







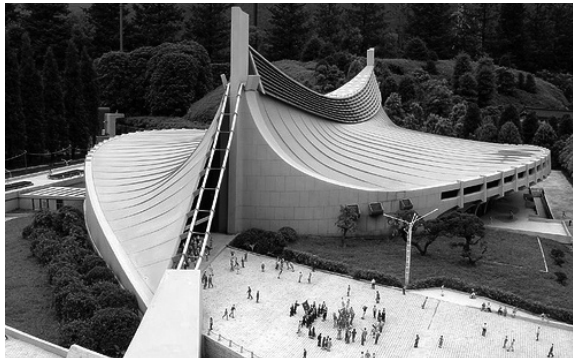


Bild 9.7: Yoyogi National Gymnasium, Tokio, 1961-64, Arch.: Kenzo Tange, Ing.: Yoshikatsu Tsuboi

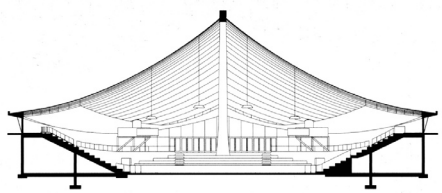
ten werden (Bild 9.5c). Die Überdachung des Mercedes Benz-Stadions in Stuttgart weist ein entsprechendes Tragwerk auf (Bild 9.6). Die zwischen den einzelnen Seilen gespannten Verbindungselemente bestehen aus einfachen Bogen-Seiltragwerken, welche die Membran der Dacheindeckung tragen.

9.3 Räumliche Kombinationen von Bogen und Seilen

Das Prinzip der räumlichen Kombination von Bögen und Seilen bietet eine grosse Freiheit in der architektonischen Ausführung. Bei ausgeführten Bauwerken mit einem Tragwerk aus räumlich angeordneten Bögen und Seilen werden die horizontalen Komponenten der Auflagerkräfte häufig nicht vollständig kompensiert, sondern in andere Bauteile eingeleitet.

Bei Kenzo Tanges Yoyogi National Gymnasium für die Olympiade in Tokio ist dies der Fall: Die horizontalen Auflagerkräfte der Haupttragseile werden weitgehend mittels unterm Terrain liegenden Druckstreben kompensiert (Bild 9.7). Die im Grundriss kreisförmig angeordneten Bögen nehmen die horizontalen Auflagerkräfte der Dachmembran auf und leiten diese teils in die Pylone, welche als vertikale Konsolen wirken, teils in die Endpunkte der Haupttragseile ein.

Ein vergleichbarer Aufbau in der Tragstruktur findet sich bei der Eishalle der Yale University von Eero Saarinen (Bild 9.8). Das primäre Tragelement entlang der zentralen Achse besteht dabei jedoch nicht mehr aus einem über Pylonen geführten Seil, sondern wurde durch einen grossen Bogen ersetzt, an welchem die Zugseile für die Dachkonstruktion aufgehängt sind. Diese Seile leiten die anfallenden Dachlasten in die als Kettenlinie geformten Bögen der Aussenwände ab.
Grundsätzlich besteht bei der räumlichen Anordnung



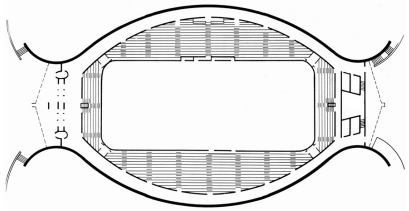




Bild 9.8: D. S. Ingalls Hockey Rink, New Haven, 1956-58, Arch.: Eero Saarinen, Ing.: Fred N. Severud (l=99 m, f=21 m)



Bild 9.9: Umbau, Mercat de Santa Caterina, Barcelona, 1999-2001, Arch.: EMTB, Ing.: Jose Maria Velasco

von Bögen und Seilen eine grosse gestalterische Freiheit, wie die Markthalle Santa Caterina in Barcelona von Enric Miralles und Benedetta Tagliabue eindrücklich aufzeigt (Bild 9.9). Drei schlanke Bogen-Seiltragwerke bilden die Primärstruktur der Halle. Die dazu quer verlaufende frei geformte tonnengewölbeartige Überdachung des Marktes ist an diesen Bögen aufgehängt. Auf diese Weise wird ohne Durchbiegung des Daches eine grössere stützenfreie Fläche ermöglicht.

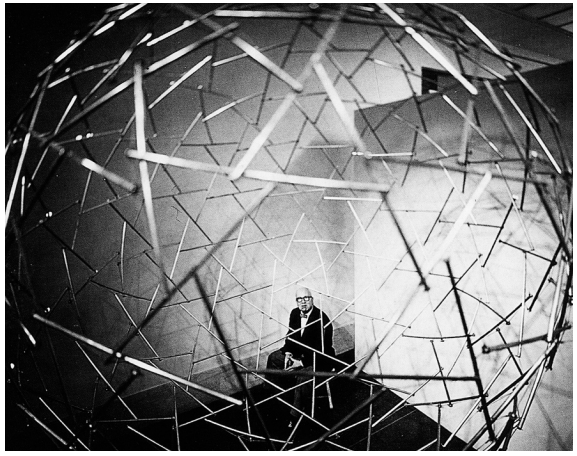


Bild 9.10: Tensegrity-Modell einer geodätischen Kuppel, Montreal, 1967, Arch.: Richard Buckminster Fuller

9.4 Tensegrity-Tragwerke

Eine spezielle Klasse von in sich geschlossenen, aus reinen Druck- und Zugelementen bestehenden Tragwerken sind die sogennanten Tensegrity-Tragwerke. Diese bestehen aus einem kontinuierlichen System von Zugelementen und einem diskontinuierlichen Subsystem von Druckelementen die sich gegenseitig stabilisieren. Die Struktur bedarf daher immer einer ausreichenden Vorspannung der Zugelemente.

Der Begriff *Tensegrity* wurde geprägt vom amerikanischen Architekten und Ingenieur Richard Buckminster Fuller (1895-1983) und geht zurück auf die Verschmelzung der Begriffe *tension* (engl. Spannung) und *integrity* (engl. Ganzheit) (Bild 9.10). Bereits vor Fuller hatte der russische Konstruktivist Karl Ioganson zu Beginn des 20. Jahrhunderts in einer Studie für skulpturale Arbeiten mit solchen Tragwerken experimentiert.

Tensegrity-Strukturen sind in der Natur weit verbreitet, sowohl auf mikroskopischer, wie auch auf makroskopischer Ebene. Buckminster Fuller erwähnt das Speichenrad mit seinen tangential verspannten Speichen als eines der ersten Beispiele für ein Tensegrity-Tragwerke. Ein solches Rad wie etwa das London Eye von David Marks und Julia Barfield (Bild 9.11) ist ein selbststabilisierendes System, bei welchem ein druckbeanspruchter Ring, die Felge, durch ein radiales System von Zugseilen, die Speichen, gegen zwei zentrale Ringseile, die Nabe, vorgespannt wird. Die Vorspannung ermöglicht es auch, Druckkräfte durch die dünnen Zugglieder zu übertragen. Die kontinuierlich angeordneten Speichen geben dem Druckring die erforderliche Stabilität. Die aus Seilbalken bestehenden räumlichen Bogen-Seiltragwerke (Bild 9.5) können somit ebenfalls als Tensegrity-Tragwerke betrachtet werden.

Der amerikanische Künstler Kenneth Snelson, ein Student von Fuller, hatte bereits während seiner Studienzeit damit begonnen, kleinere Skulpturen nach dem Tensegrity-Prinzip zu bauen. Später realisierte er auch Projekte in grösserem Massstab. Eine der schönsten dabei entstandenen Skulpturen ist der Needle Tower im Smithsonian Institute in Washington D.C. (Bild 9.12). Der Turm ist ca. 18 m hoch und besteht aus einer Addition von nach dem Tensegrity-Prinzip angeordneten Druckelementen.



Bild 9.11: London Eye, London, 1999, Arch.: Marks Barfield Architects, Ing.: Mace Group

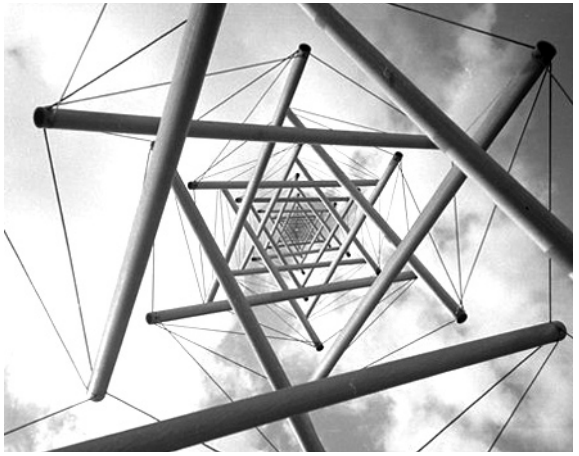
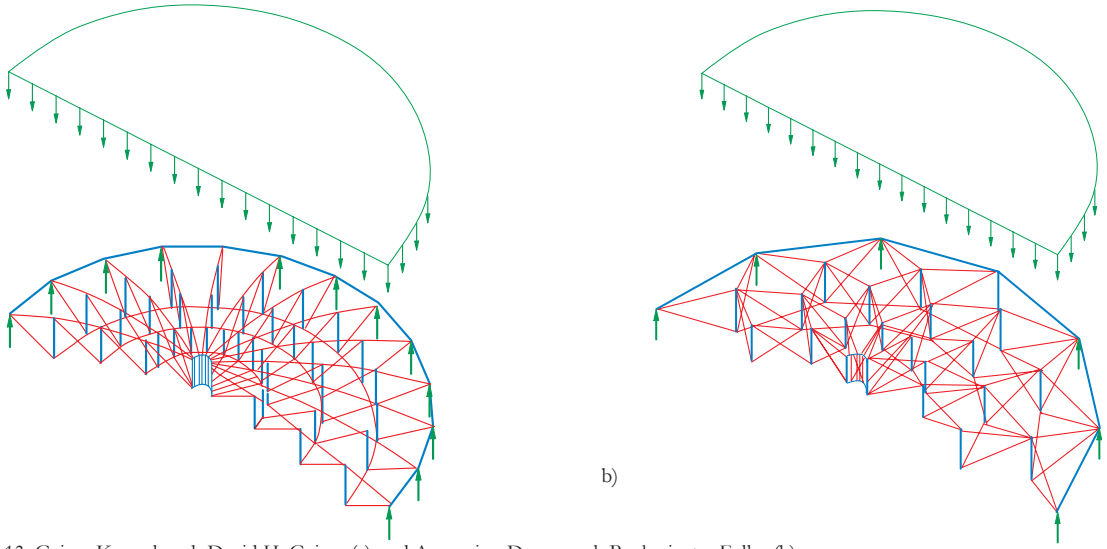


Bild 9.12: Needle Tower, Smithsonian Institute, Washington D.C., 1968, Arch.: Kenneth Snelson



a) b)

Bild 9.13: Geiger Kuppel nach David H. Geiger (a) und Aspension Dome nach Buckminster Fuller (b)

Grundsätzlich lassen sich Tensegrity Tragwerke auf der Basis unterschiedlichster geometrischer Figuren entwickeln. All diese Tragwerke zeichnen sich durch die Besonderheit aus, dass sich die Druckstäbe nicht gegenseitig berühren, und die Seile vorgespannt sein müssen (Bild 9.14).

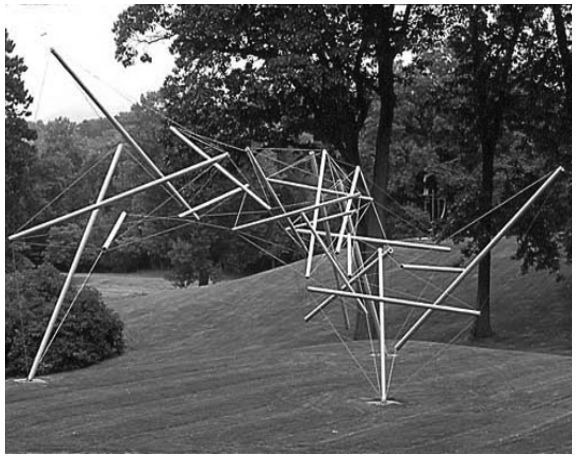


Bild 9.14: Free Ride Home, Storm King Art Center, Mountainville, 1974, Arch.: Kenneth Snelson

Der Ingenieur David H. Geiger (1935-89) verband das Prinzip der Tensegrity-Systeme mit tragenden Membranflächen und erreichte dadurch mit seinen nach ihm benannten Kuppeln maximale Spannweiten bei einem Minimum an Konstruktionsgewicht (Bild 9.13). Die radial angeordneten unterspannten Gratseile werden dabei durch die dazwischen gespannte Membran stabilisiert. Die Membranfläche übernimmt die Funktion des Ringseiles. Bezieht man den Druckring mit in das System ein, gehören die Seilkuppeln zu den geschlossenen selbststabilisierenden Tensegrity Systemen.

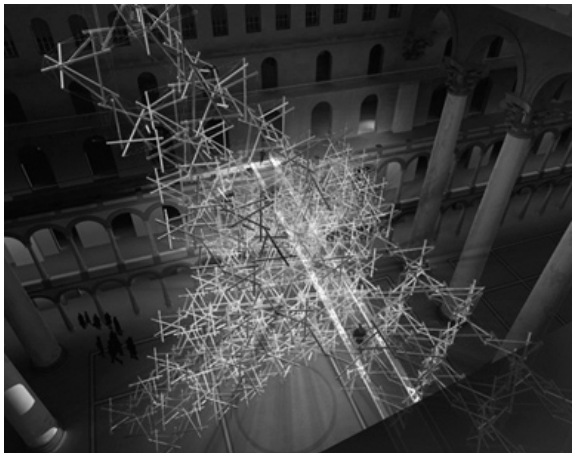


Bild 9.15: Tensegrity Bridge, National Building Museum, Washington D.C., 2003, Arch.: Wilkinson Eyre Architects, Ing.: Cecil Balmond

Tensegrity-Tragwerke bilden somit eine grundlegende Tragwerksart, in der das Zusammenspiel von Zug und Druck und die räumliche Verteilung der Lasten studiert werden kann. Obwohl sich verschiedene Forscher bemüht haben Tensegrity-Tragwerke als Leichtbautragwerke weiterzuentwickeln und einzusetzen, haben sie im Bauwesen eine untergeordnete Bedeutung behalten.

Eines der wenigen zeitgenössischen Beispiele ist die als Installation geplante, aber nicht ausgeführte, Errichtung einer temporären Brücke für das National Building Museum von Wilkinson Eyre Architects in Zusammenarbeit mit Cecil Balmond (Bild 9.15). Diese Struktur basiert auf einer Akkumulation von tetraederförmigen Tensegrity-Zellen mit Druckelementen aus Glas.

10 Ebene Fachwerke

In den Kapiteln 3, 6 und 8 wurden schrittweise die ausschliesslich auf Zug belasteten Seiltragwerke, die ausschliesslich auf Druck belasteten Bogentragwerke und die sowohl auf Zug wie auf Druck belasteten Bogen-Seiltragwerke behandelt. Bogen-Seiltragwerke entstehen dabei als Überlagerung eines auf Druck belasteten Bogens und eines auf Zug belasteten Seils. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie durch sukzessive Überlagerung von Bogen-Seiltragwerken eine flächige Verteilung der Druck- und Zugkräfte ermöglicht wird und dabei das Bogen-Seiltragwerk in ein Fachwerk übergeht.

Es ist somit stets möglich, die Tragwirkung eines Fachwerkes vereinfachend mit derjenigen eines Bogen-Seiltragwerkes darzustellen. Abgestützt auf diesen Sachverhalt können die inneren Kräfte in Fachwerken auf einfache Art mit Hilfe der graphischen Statik ermittelt werden. Aus diesem Zusammenhang wird ersichtlich, dass die durch das Fachwerk implizierte Überlagerung eine Verteilung der Kräfte in der Ebene des Tragwerks erzeugt und dies einerseits zu kleineren Kräften in den geneigten Tragelementen führt und andererseits das Tragsystem praktisch unempfindlich wird gegenüber einseitigen Lasten.

10.1 Das Fachwerk als Kombination von Bogen-Seiltragwerken

Falls bei einer vorgegebenen Spannweite ein Tragwerk mit einer möglichst kleinen Pfeilhöhe entworfen werden soll, so weisen die Druck- und die Zugelemente grosse innere Kräfte auf. Dieser Sachverhalt wurde bereits an einem einfachen Seiltragwerk im Bild 3.3b anschaulich dargelegt.

Um die Kräfte in den vertikalen bzw. geneigten Tragelementen klein zu halten, können *mehrere Bogen-Seiltragwerke miteinander kombiniert* werden. Dies soll am Beispiel eines symmetrischen Tragwerkes unter einer Einzellast in Feldmitte aufgezeigt werden. Ein solches symmetrisches Bogen-Seiltragwerk trägt je 50% der Last zu einem fiktiven Auflager ab (Bild 10.1a). Dieses Tragwerk kann als Subsystem des gesuchten definitiven Tragwerks betrachtet werden. Bei den fiktiven Auflagern werden die dort wirkenden Kräfte mittels eines Zugelementes an ein zweites Bogen-Seiltragwerk angehängt, welches als zweites Subsystem die Kräfte zu einem weiteren fiktiven Auflager weiterleitet (Bild

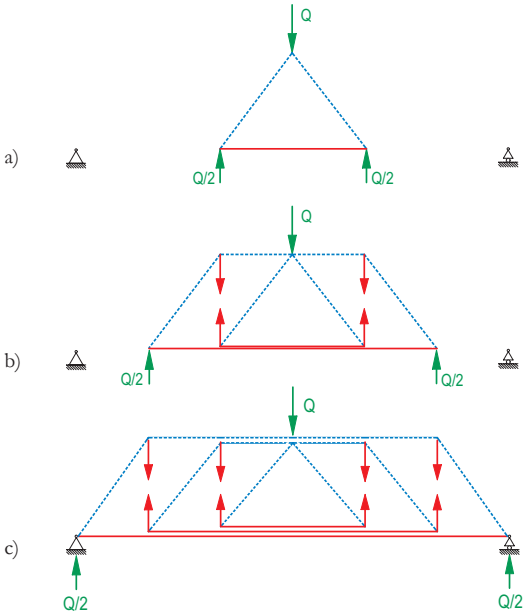


Bild 10.1: Fachwerk als Kombination von Bogen-Seiltragwerken

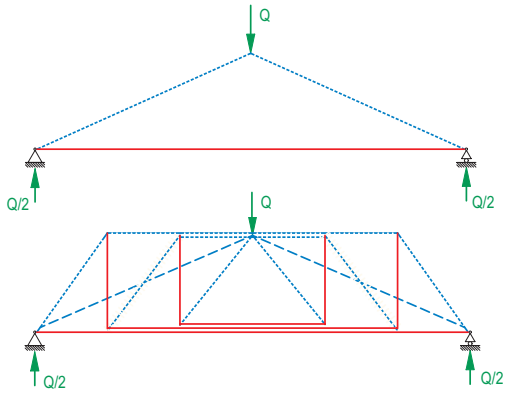
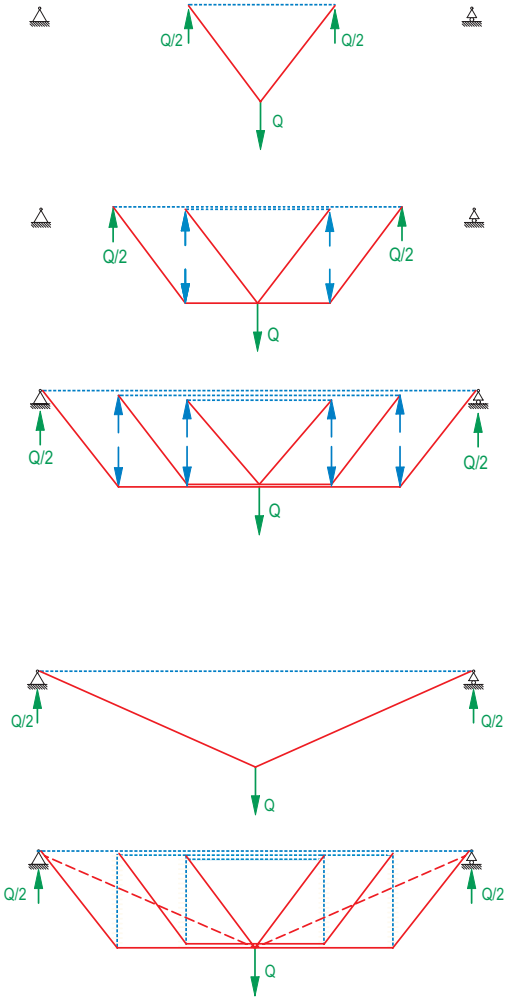


Bild 10.2: Fachwerk als einfaches Bogen-Seiltragwerk mit Kraftausbreitungen



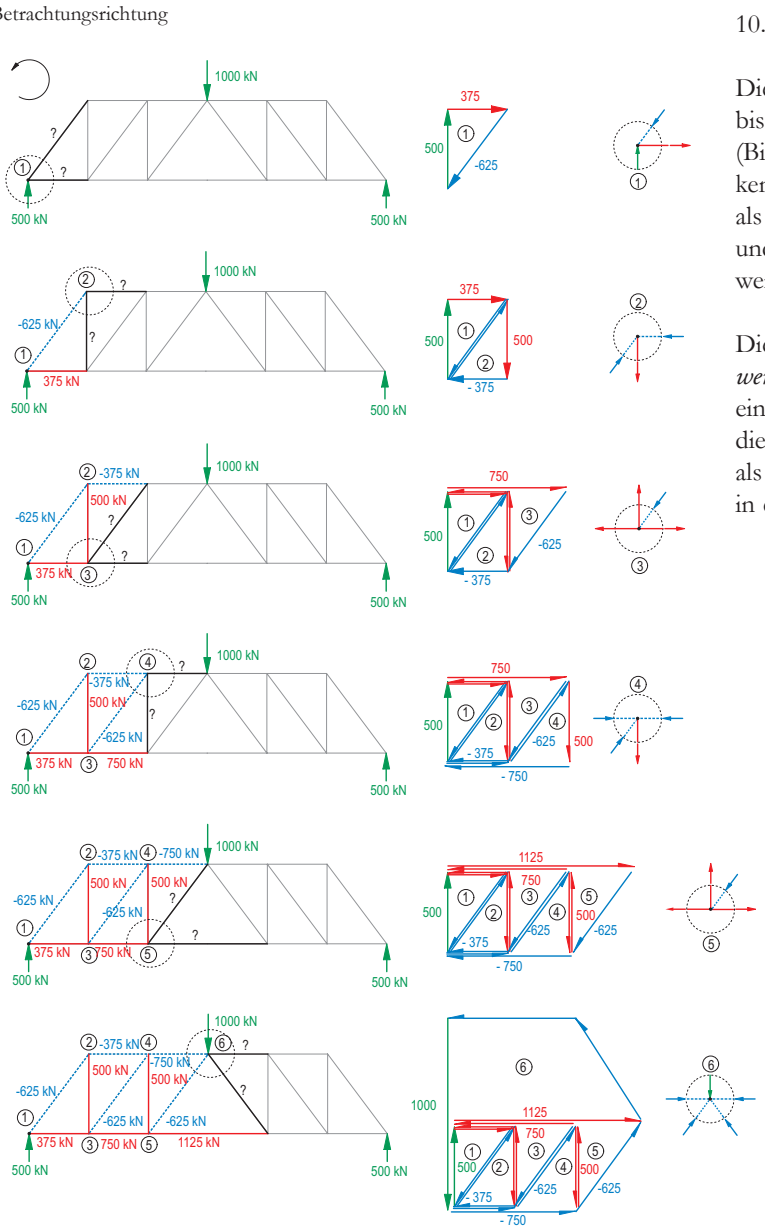


Bild 10.3: Sukzessive Ermittlung der Stabkräfte

10.1b).

Dieses Verfahren kann beliebig oft fortgesetzt werden, bis die Lasten das effektive Auflager erreicht haben (Bild 10.1c). Das Vorgehen kann sowohl mit Tragwerken, welche aus Bögen und geraden Seilen bestehen, als auch mit Tragwerken, welche aus polygonalen Seilen und geraden Druckelementen bestehen, durchgeführt werden.

Die Tragelemente des Fachwerkes werden als *Fachwerkstäbe* bezeichnet. Im untersuchten Beispiel mit einer konzentrierten äusseren Last in Feldmitte sind die Kräfte in allen vertikalen Tragelementen, welche als *Pfosten* bezeichnet werden, sowie auch die Kräfte in den schrägen Tragelementen, welche als *Diagonalen* bezeichnet werden, konstant. Infolge der Überlagerung der einzelnen Bogen-Seiltragwerke nehmen die Kräfte in den horizontalen Tragelementen, welche als *Gurte* bezeichnet werden, dagegen von den Auflagern zur Feldmitte hin progressiv zu. Die Tragwirkung kann auch anders interpretiert werden: ausgehend von einem gemischten Bogen-Seiltragwerk, welches die Last Q direkt zu den beiden Auflagern abträgt, stellen die Pfosten und die Diagonalen des Fachwerkes zusammen mit den Gurtkräften eine so genannte *Kraftausbreitung* dar (Bild 10.2).

10.2 Ermittlung der inneren Kräfte

Bei Fachwerken wird angenommen, dass alle Fachwerk-

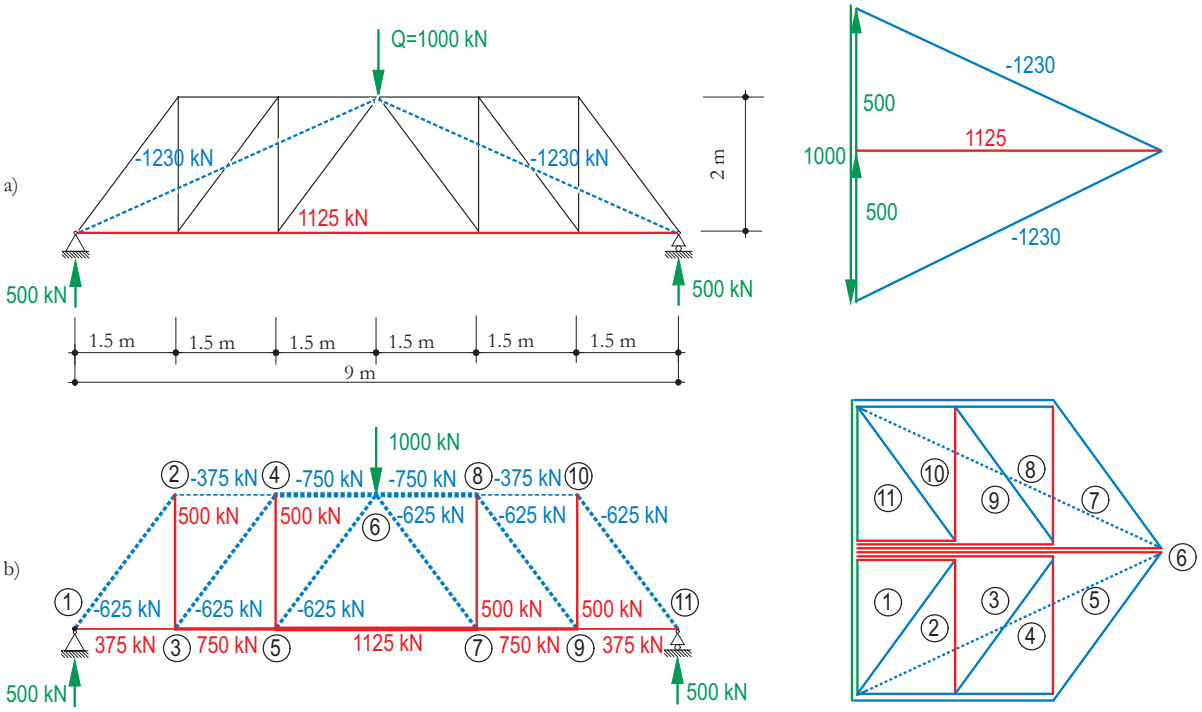


Bild 10.4: Fachwerk mit einer Einzellast (a) und innere Stabkräfte (b)

stäbe gerade und in den Knoten gelenkig angeschlossen sind. Daraus folgt, dass jeder Stab mit einer zentrisch wirkenden inneren Kraft beansprucht ist, welche sowohl eine Zugkraft als auch eine Druckkraft sein kann.

Im Folgenden sollen die inneren Kräfte in einem Fachwerk unter zentrischer Einzellast gemäss Bild 10.4a ermittelt werden. In einem ersten Schritt können die Auflagerkräfte bestimmt werden, indem ein einfaches Bogen-Seiltragwerk mit gleicher Spannweite in das Fachwerk eingepasst wird. Dabei wird die Pfeilhöhe des Bogen-Seiltragwerkes gleich gross wie die Höhe des Fachwerkes gewählt. Die Bedeutung dieser Festlegung wird nach dem Erstellen des Cremonaplans ersichtlich.

Die inneren Kräfte im Fachwerk können gemäss Bild 10.4b systematisch mit Hilfe von Subsystemen in den einzelnen Knoten ermittelt werden. Ausgegangen wird von einem Knoten mit *zwei unbekannten Stabkräften*. Das ist im vorliegenden Fall der Knoten 1 beim linken Auflager. Mit Hilfe des Subsystems 1 im Knoten können die Kräfte in beiden angrenzenden Stäben ermittelt werden, wobei die Intensität aus dem Cremonaplan hervorgeht, und die Richtung der Kraft beim Verschieben in den Lageplan Auskunft darüber gibt, ob der Stab auf Druck oder auf Zug beansprucht ist (Bild 10.3). Drückt die Kraft gegen den Knoten, so ist eine Druckkraft im Stab vorhanden; zieht dagegen die Kraft am Knoten, so ist eine Zugkraft im Stab vorhanden. Der untere Gurtstab ist somit, ebenso wie das Seil des Bogentragwerks, auf Zug, und die Diagonale des Fachwerks auf Druck beansprucht (vgl. Bild 10.1).

Nachdem die Kräfte in den beiden ersten Stäben bekannt sind, können diese auf die benachbarten Knoten übertragen werden. Im Knoten 3 reduzieren sich somit die unbekannten Stabkräfte auf drei, und im Knoten 2 auf zwei Kräfte. Der Knoten 2 ist somit lösbar geworden und die inneren Kräfte in den angrenzenden Stäben können sinngemäss wie beim Knoten 1 ermittelt und im Cremonaplan dargestellt werden. So wird sukzessiv von Knoten zu Knoten fortgeschritten, bis alle inneren Kräfte bestimmt sind. Aus Symmetriegründen sind beim behandelten Beispiel die Stabkräfte auf der linken Fachwerkseite identisch zu denjenigen der rechten Fachwerkseite. Ein Vergleich des Cremonaplanes des Fachwerkes mit demjenigen des eingepassten Bogen-Seiltragwerkes liefert die Begründung für die Wahl der Pfeilhöhe des gemischten Bogen-Seiltragwerkes: wird diese gleich der Höhe des Fachwerkes gesetzt, so resultieren verwandte Cremonapläne (Bild 10.4b). *Die Zugkraft im Zugelement des Bogen-Seiltragwerkes ist in der Tat identisch mit der maximalen Zuggurtkraft des Fachwerkes in Feldmitte.* Aus der Überlagerung der beiden Cremonapläne wird ebenfalls ersichtlich, dass die Diagonalen und Pfosten des Fachwerkes in Kombination mit den Gurten als *Kraftausbreitungselemente der geneigten Druckelemente* des gemischten Bogen-Seiltragwerkes interpretiert werden können (vgl. Bild 10.2).

10.3 Einfluss der Lage der äusseren Kräfte

Das beschriebene Vorgehen der sukzessiven Bestimmung der inneren Kräfte in einem Fachwerk kann sinngemäss unabhängig von der Lage der äusseren Lasten angewendet werden. So kann das Verfahren auch zur Untersuchung eines Fachwerkes verwendet werden, wenn dieses gemäss Bild 10.5 mit zwei Einzellasten

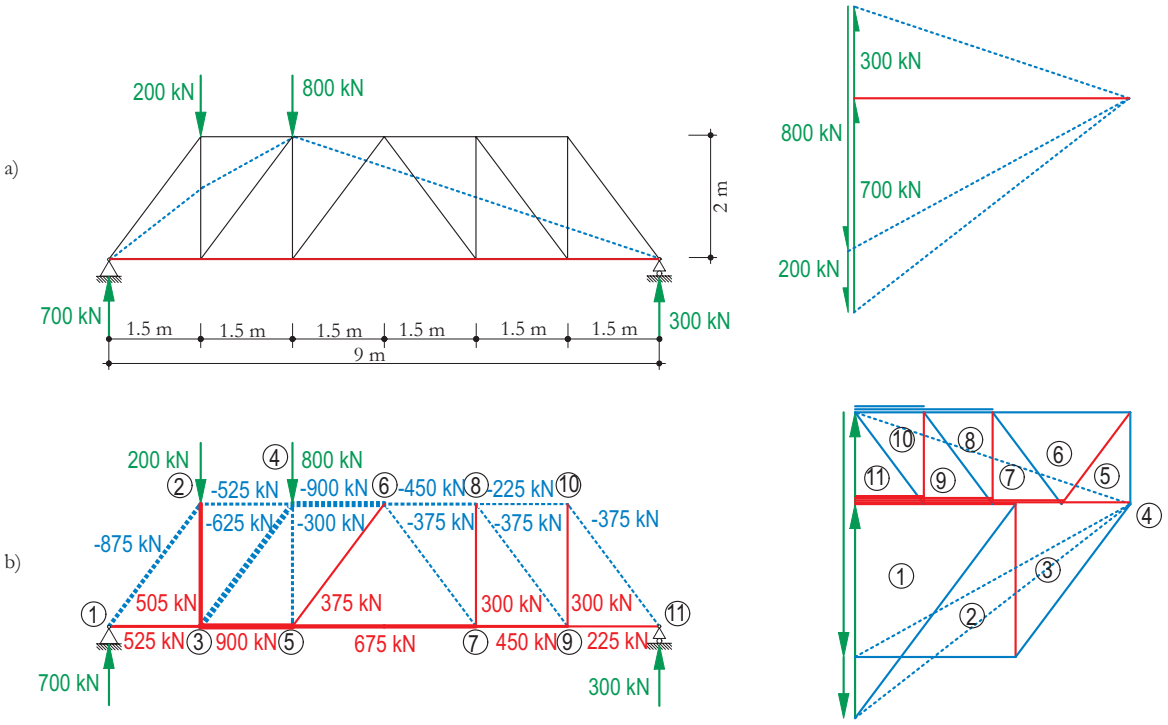


Bild 10.5: Stabkräfte in einem Fachwerk mit zwei Einzellasten

belastet wird, welche nicht symmetrisch, sondern auf der linken Seite des Fachwerkes angeordnet sind. Es ist dabei jedoch darauf zu achten, dass die äusseren Kräfte in den Knoten angreifen, da sonst zusätzlich zu den Druck- bzw. Zugkräften Biegung in den Stäben entsteht (vgl. Einleitung zu Kapitel 3). Nach der Bestimmung der Auflagerkräfte mit Hilfe eines eingepassten Bogen-Seiltragwerkes können dann die inneren Kräfte sukzessiv ermittelt werden, indem von Knoten zu Knoten gesprungen wird.

Das Fachwerk ist im Gegensatz zum Seiltragwerk und zum Bogentragwerk in der Lage, einseitige Lasten aufzunehmen, ohne dabei wie das Seiltragwerk eine neue Form annehmen zu müssen, oder wie der schlanke Bogen stabilitätsgefährdet zu sein. Die Kräfte in den Diagonalen und Pfosten können sich den äusseren Lasten anpassen, wie ein Vergleich der Druck- und Zugkräfte in den Bildern 10.4 und 10.5 zeigt. Ein Fachwerk kann im Sinne von Bild 6.12 somit auch als ein *ausgesteiftes Bogen-Seiltragwerk* interpretiert werden.

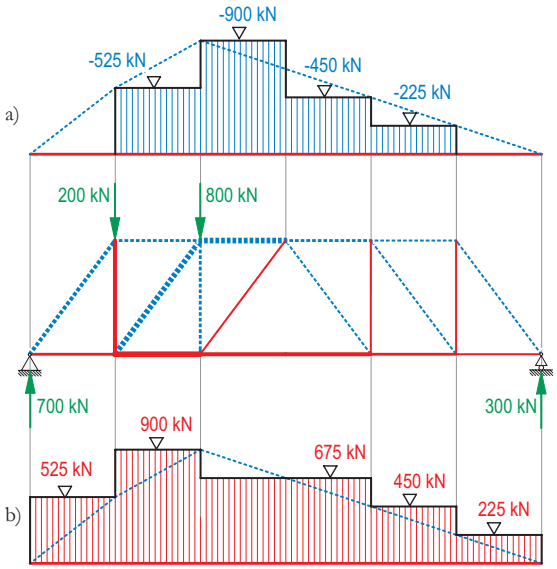


Bild 10.6: Kraftverlauf im Druckgurt (a) und Zuggurt (b)

10.4 Ermittlung der Gurtkräfte

Erkennen der am stärksten beanspruchten Gurtstäbe

Im vorherigen Abschnitt wurde ein Fachwerk unter beliebig angeordneten Lasten untersucht und alle inneren Kräfte mit Hilfe des Cremonaplanes ermittelt (Bild 10.5). In einem ersten Schritt wurden dazu die inneren Kräfte im zugehörigen Bogen-Seiltragwerk sowie die Auflagerkräfte ermittelt. Im Folgenden wird aufgezeigt, dass mit diesem Schritt die Tragwirkung des Fachwerkes bereits vollständig erkannt ist und, wie im vorherigen Abschnitt bereits angedeutet, die Tragwirkung des Fachwerks als Verfeinerung derjenigen des Bogen-Seiltragwerkes verstanden werden kann.

Im Bild 10.6 ist das Bogen-Seiltragwerk dem Verlauf der Gurtkräfte gegenübergestellt. Es wird ersichtlich, dass die Gurtkräfte sich proportional zum Verlauf des Bogen-Seiltragwerkes verändern. Da die Stabkräfte entlang eines Fachwerkstabes konstant sind, kann die graphische Darstellung der Gurtkräfte als Darstellung des Bogen-Seiltragwerks mit geringerer Auflösung verstanden werden. Aus dem Vergleich der Gurtkräfte mit dem Bogen-Seiltragwerk wird deutlich, dass die *Gurtkräfte an denjenigen Orten maximal sind, wo der Abstand zwischen Druck- und Zugelement des zugehörigen Bogen-Seiltragwerks am grössten ist.* Durch diese Regel können somit diejenigen Gurtstäbe einfach bestimmt werden, die für die Bemessung massgebend sind.

Wenn die Drucklinie des Bogen-Seiltragwerks, wie im Bild 10.6, im Bereich der maximalen Gurtkraft keine zum Zugelement parallele Strecke aufweist, dann stellt sich die Frage, auf welcher Seite des Knotens der maximal beanspruchte Gurtstab liegt. In diesem Fall gibt eine einfache qualitative Gleichgewichtsüberlegung im Knoten Auskunft darüber, ob die Summe der Horizontalkomponenten der im Knoten angreifenden Diagonalenkräfte den Gurt belastet oder entlastet. Hieraus kann die relative Lage der maximalen Gurtkraft abgeleitet werden.

Diese Betrachtung ist besonders dann sehr nützlich, wenn das Fachwerk aus einer grossen Anzahl von Stäben besteht und eine vollständige Analyse die Untersuchung von vielen Subsystemen erfordern würde. Die beschriebene Beziehung zwischen maximal beanspruchtem Gurtstab und zugehörigem Bogen-Seiltragwerk gilt jedoch nur bei Fachwerken mit parallelen Gurten. Sind die Gurte nicht parallel, also bei veränderlicher Höhe des Fachwerks, so wird das Erkennen des am stärksten beanspruchten Gurtstabes aufwändiger. Es ist dann derjenige Stab zu finden, welcher das grösste Verhältnis

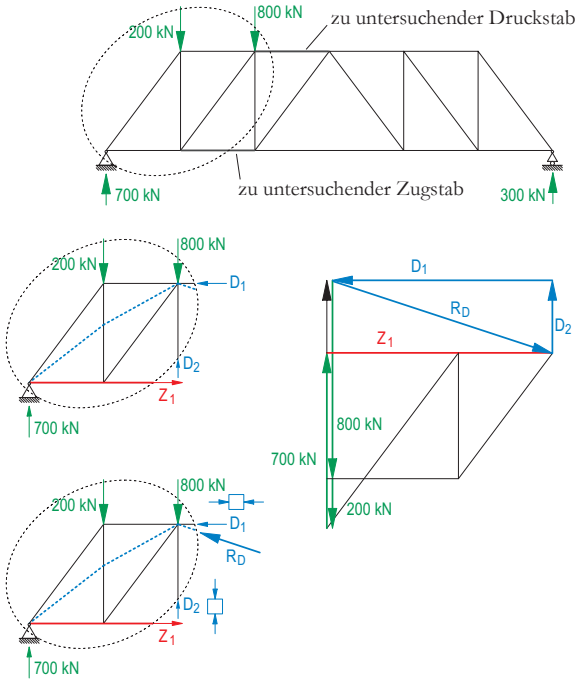


Bild 10.7: Ermittlung der maximalen Gurtkräfte mit Hilfe des linken Subsystems

vom Abstand des Druck- zum Zugelement des Bogen-Seiltragwerkes zur effektiven Höhe des Fachwerks hat.

Direkte Ermittlung der Kräfte in den Gurtstäben

Sind auf Grund des Bogen-Seiltragwerkes die Auflagerkräfte und die Lage der maximal beanspruchten Gurtstäbe bekannt, so können mit Hilfe eines einfachen Subsystems *die inneren Kräfte der am stärksten beanspruchten Gurtstäbe* bestimmt werden. Jedes mögliche Subsystem muss dabei selbstverständlich diejenigen Stäbe schneiden, die untersucht werden sollen. Für die Untersuchung der inneren Kräfte stehen somit grundsätzlich zwei mögliche Subsysteme zur Auswahl (Bild 10.7 und Bild 10.8). An jedem dieser Subsysteme

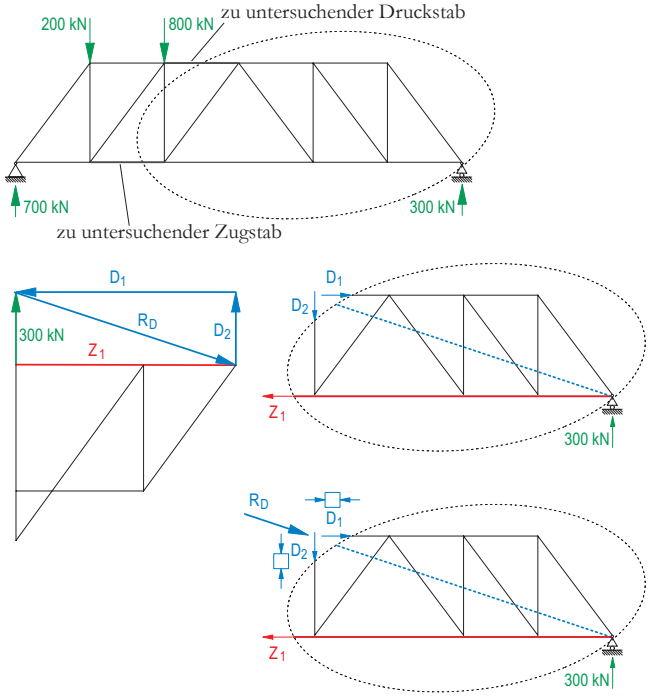


Bild 10.8: Ermittlung der maximalen Gurtkräfte mit Hilfe des rechten Subsystems

greifen vier unterschiedliche Kräfte an, aus deren Zusammenspiel mittels des Cremonaplans die maximale Gurtkraft ermittelt werden kann:

- die Resultierende der äusseren Kräfte und der Auflagerkraft
- die Kraft D_1 im Druckgurt
- die Kraft Z_1 im Zuggurt
- und die Kraft D_2 im Pfosten.

Die Kräfte D_1, Z_1 und D_2 sind dabei unbekannt. Die Aufgabe kann nur gelöst werden, wenn zwei unbekannte Kräfte zu einer Resultierenden zusammengefasst werden, so dass nur noch zwei unbekannte Kräfte vorhanden sind. Im vorliegenden Fall kann die Druckgurtkraft D_1 und die Pfostenkraft D_2 zu einer Resultierenden R_D zusammengefasst werden, deren Wirkungslinie mit derjenigen des Druckstabs des Bogen-Seiltragwerks übereinstimmen muss. Anschliessend können die Unbekannten Z_1 und R_D mit Hilfe des Cremonaplanes ermittelt werden, und R_D in die Kräfte D_1 und D_2 zerlegt werden.

Wie aus Bild 10.6 ersichtlich, ist die *maximale Gurtkraft Z_1 identisch mit der Zugkraft des Bogen-Seiltragwerks,* wenn die Pfeilhöhe des Bogen-Seiltragwerks mit der Höhe des Fachwerks übereinstimmt. *Die maximale Druckkraft D_1 des Fachwerks weist dieselbe Intensität auf.* Dieser Sachverhalt ist auch im Cremonaplan des Fachwerkes ersichtlich (Bildes 10.5).

Erkennen der am stärksten beanspruchten Diagonalen und Pfosten

Aus dem Cremonaplan des Bildes 10.5 kann weiter abgelesen werden, dass die Vertikalkomponenten der inneren Kräfte in den Diagonalen und Pfosten identisch sind mit den Vertikalkomponenten der inneren Kräfte in den geneigten Tragelementen des Bogen-Seiltragwerkes, im vorliegenden Beispiel also des Druckelementes. Es kann daher gefolgert werden, dass *die Kräfte in den Diagonalen und Pfosten in dem Bereich am grössten sind, wo die Neigung der geneigten Tragelemente des Bogen-Seiltragwerks am grössten sind.*

Bei den bisher behandelten Fachwerken, alle an beiden Enden aufgelagert und mit von oben nach unten gerichteten äusseren Lasten beansprucht, befinden sich die Orte maximaler Beanspruchung der Diagonalen stets im Bereich der Auflager, ist doch der Bogen des Bogen-Seiltragwerks in diesen Bereichen am stärksten geneigt. Es ist zu bemerken, dass die innere Kraft der Diagonalen im Auflagerknoten gemäss Bild 10.9 mit einem einfachen Kräftepolygon direkt ermittelt werden kann.

Das Bogen-Seiltragwerk gibt auch Auskunft darüber, ob die *Diagonalen auf Druck oder auf Zug* beansprucht sind. Wie aus dem Bild 10.5 hervorgeht, sind die Diagonalen auf Druck beansprucht, wenn sie *qualitativ gleich geneigt* sind wie der Bogen des Bogen-Seiltragwerks und umgekehrt. Dieselbe Aussage gilt sinngemäss auch

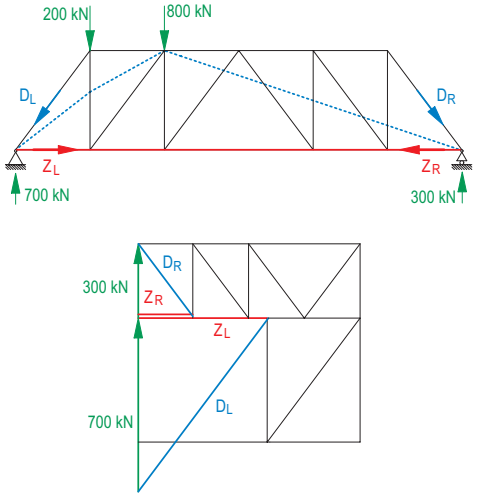


Bild 10.9: Ermittlung der maximalen Kräfte in den Diagonalen und Pfosten

bei der Anwendung von Bogen-Seiltragwerken mit geradem Druckelement und gekrümmtem Seil. Das Studium der Neigung des Bogens des Bogen-Seiltragwerks erweist sich somit als sehr hilfreich bei komplexeren Tragwerken oder wenn die äusseren Lasten teils nach unten, teils nach oben gerichtet sind.

10.5 Labile, statisch bestimmte und statisch unbestimmte Fachwerke

Im Allgemeinen verändert sich die Drucklinie eines Bogens bei Variation der Lastsituation (vgl. Bild 3.13 und Bild 6.10). Das im Bild 10.11a dargestellte Bogen-Seiltragwerk wird deshalb als *labil* bezeichnet, weil es nicht in der Lage ist, beliebige Lasten aufzunehmen ohne dabei die Form zu verändern. Durch Ergänzung eines zusätzlichen Stabes wird der Bogen stabilisiert, und es entsteht ein einfaches Tragwerk, bestehend aus 5 Stäben, welche in 4 Knoten gelenkig angeschlossenen sind und zwei Dreiecke aufspannen (Bild 10.11b). Die inneren Kräfte in diesem Tragwerk können wie zuvor mit Hilfe des im Abschnitt 10.2 beschriebenen Verfahrens ermittelt werden. Das Tragwerk wird daher als innerlich *statisch bestimmt* bezeichnet.

Das sukzessive Berechnen der inneren Stabkräfte in einem Tragwerk beruht ganz wesentlich auf der Existenz eines initialen Subsystems mit nur zwei Unbekannten. Wird ein weiterer Stab eingefügt, so kommen in jedem Knoten des Tragwerks drei Stäbe zusammen (Bild 10.11c). Es ist dann unmöglich geworden, ein Subsystem mit nur zwei Unbekannten zu bilden. Ein solches Tragwerk wird als *statisch unbestimmt* bezeichnet. Bei statisch unbestimmten Tragwerken ist es nicht mehr möglich, die Stabkräfte eindeutig mit den Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln. Die inneren Stabkräfte in einem Fachwerk lassen sich also nur dann vollständig bestimmen, wenn die Anzahl K der Knoten, die Anzahl S der Stäbe und die Anzahl A der Unbekannten im Auflager in einem ausgewogenen Verhältnis zueinander stehen. Generell wird eine Kraft eindeutig durch die Intensität und Richtung definiert (vgl. Abschnitt 2.1). Für die Bestimmung der Auflagerkraft in einem festen Auflager werden daher zwei Grössen benötigt. In einem verschieblichen Auflager ist hingegen die Richtung der Auflagerkraft immer bekannt und für die Bestimmung wird deshalb nur eine Grösse, die Intensität, benötigt.

Im einfachsten Fall eines Fachwerks folgt somit K=3, S=3 und A=3 (Bild 10.10). Mittels des Cremonaplanes können in Knoten 1 die zwei unbekannten Intensitäten der Druckkräfte in den Stäben ermittelt werden. Damit kann anschliessend aus den Informationen des Lageplans in Knoten 2 die Intensität der Zugkraft und der Auflagerkraft im verschieblichen Auflager konstruiert werden. Daraus ergibt sich in Knoten 3 die Intensität und Richtung der zweiten Auflagerkraft. Durch die Betrachtung der drei Knoten können also alle sechs unbekannte Grössen festgelegt werden.

Diese Betrachtung macht deutlich, dass durch das Zusammenspiel von Lageplan und Cremonaplan in jedem Knoten eines Fachwerkes immer genau zwei unbekannte Grössen, also *Intensitäten und/oder Richtungen von Stab- oder Auflagerkräften*, berechnet werden können. Generell kann das grafische Verfahren daher verstanden werden als ein Gleichungssystem, in welchem genau *2·K Grössen eindeutig bestimmt* werden können. Durch den Lageplan werden für die S Stabkräfte im Fachwerk die Richtungen festgelegt, die zugehörigen Intensitäten sind dabei noch unbekannt. Auch die Intensität im verschieblichen Auflager, respektive Intensität und Richtung im nicht verschieblichen Auflager, sind unbestimmt. In einem beliebigen Fachwerk sind somit insgesamt *S+A Grössen unbekannt.*

Gilt daher $2 \cdot K = S+A$, so können alle unbekannten

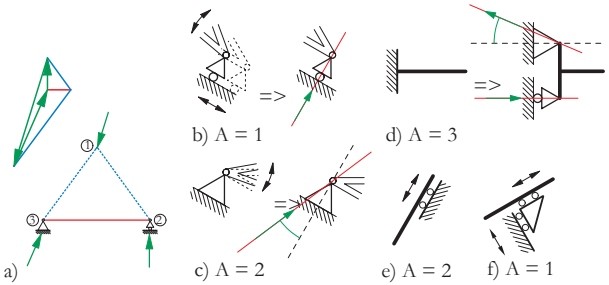


Bild 10.10: Einfaches Bogen-Seiltragwerk als Gleichungssystem (a) Rollenlager (b), Kipplager (c), Einspannung (d), Einspannung 1-achsig verschieblich (e) und Einspannung 2-achsig verschieblich (f)

Grössen analog zu Bild 10.10 bestimmt werden. Übersteigt die Anzahl Unbekannter die Anzahl bestimmbarer Grössen, so ist das Fachwerk statisch unbestimmt; ist die Anzahl Unbekannter kleiner als die Anzahl bestimmbarer Grössen, so ist das Fachwerk überbestimmt und daher labil. Zusammenfassend gilt somit:

- $S+A < 2 \cdot K$: das System ist labil,
- $S+A = 2 \cdot K$: das System ist statisch bestimmt
- $S+A > 2 \cdot K$: das System ist statisch unbestimmt.

Da die obigen Überlegungen nur auf dem Zusammenwirken von Lageplan und Cremonaplan beruhen, kann

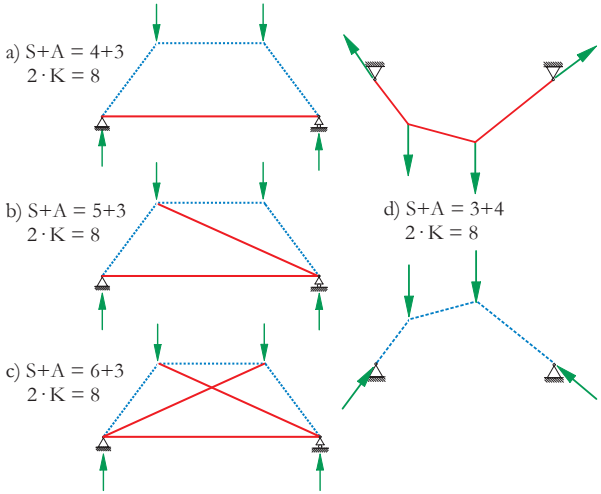


Bild 10.11: Labiles (a), statisch bestimmtes (b), statisch unbestimmtes Tragwerk (c) und Seil/Bogen als labiles Tragwerk (d)

das beschriebene Vorgehen auch zur Überprüfung der statischen Bestimmtheit von beliebigen Arten von Tragwerken angewendet werden. Es ist interessant zu sehen, dass ein Seil unter mehreren Lasten, vom beschriebenen Standpunkt aus gesehen, als Tragwerk mit einem hohen Labilitätsgrad zu betrachten ist (Bild 10.11d). In der Tat kann die Gleichgewichtslage nur als Folge von Verformungen erreicht werden. Im analogen Fall eines Bogens mit mehr als drei Gelenken, führt die Labilität zur Instabilität des Bogens.

10.6 Geometrie der Fachwerke

Einfluss der Höhe und der Spannweite auf die inneren Kräfte der Fachwerke

Bei der Behandlung der Seile und der Bögen unter konzentrierten Lasten wurde gezeigt, dass die horizontale Komponente der inneren Kräfte direkt proportional zur Spannweite und umgekehrt proportional zur Pfeilhöhe ist (vgl. Bild 3.3). Mit anderen Worten, wird bei gleich bleibender Pfeilhöhe die Spannweite verdoppelt oder bei gleich bleibender Spannweite die Pfeilhöhe halbiert, so verdoppelt sich die Horizontalkomponente der inneren Kräfte.

Für die Fachwerke gelten die gleichen Beziehungen für die inneren Kräfte der Gurte, die Höhe und die Spannweite. Im Bild 10.12 sind vier verschiedene Fachwerke dargestellt. Die Höhe wurde im Bild 10.12b gegenüber dem Fachwerk im Bild 10.12a verdoppelt, im Bild 10.12c dagegen halbiert. Aus den zugehörigen Cremonaplänen ist ersichtlich, wie beim Fachwerk mit doppelter Höhe die horizontalen Komponenten aller inneren Kräfte halbiert werden. Analog führt eine Halbierung der Höhe zu einer Verdoppelung der inneren Kräfte der Gurte. Werden dagegen alle Abmessungen des Fachwerks bei gleich bleibender äusseren Last proportional verändert, so ändert sich nichts an den inneren Kräften. Dies wird beim Vergleich der Cremonapläne im Bild 10.12c und Bild 10.12d deutlich. Sowohl die Höhe wie auch die Spannweite wurde beim Fachwerk im Bild 10.12d gegenüber dem Fachwerk im Bild 10.12c verdoppelt. Beide Fachwerke weisen dann die gleichen

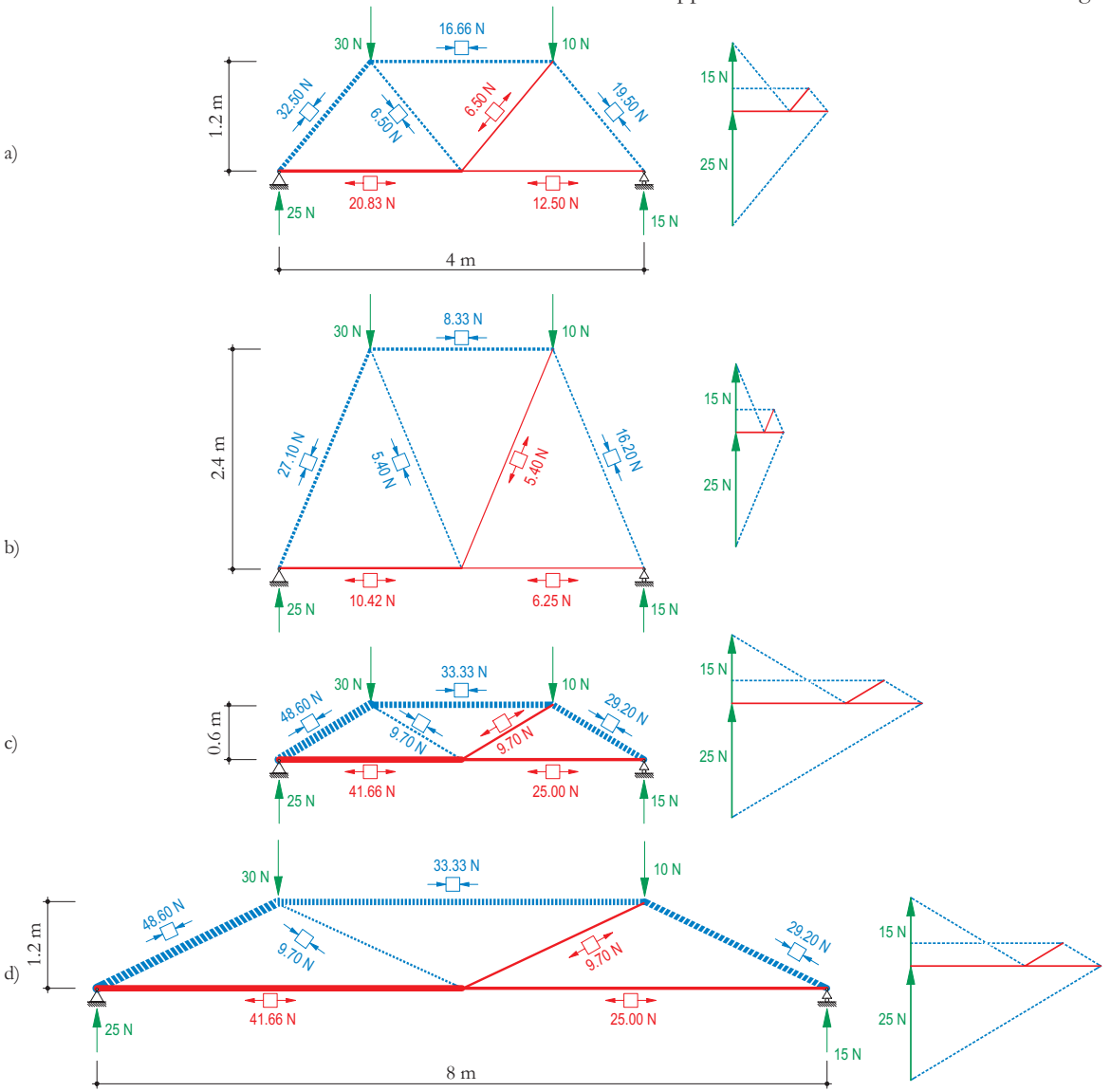


Bild 10.12: Einfluss einer proportionalen Veränderung der Geometrie eines gegebenen Fachwerks (a) auf die inneren Kräfte: doppelte Höhe (b), halbe Höhe (c), doppelte Breite (d)

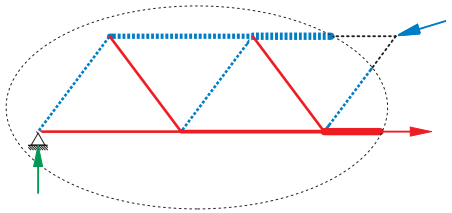


Bild 10.13: Fachwerk mit V-förmigen Diagonalen (System Warren)

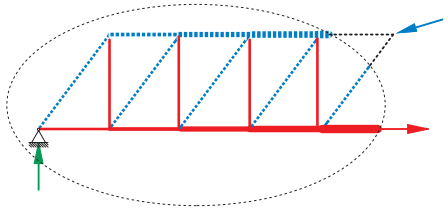


Bild 10.14: Fachwerk mit N-förmigen Diagonalen (System Howe)

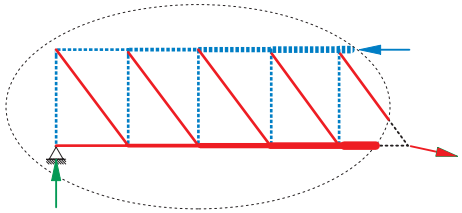


Bild 10.15: Fachwerk mit N-förmigen Diagonalen (System Pratt)

inneren Kräfte auf.

10.7 Verschiedene Arten von Fachwerken

In Abhängigkeit der Anordnung der Pfosten und der Diagonalen ergeben sich verschieden Arten von Fachwerken, auf welche im Folgenden genauer eingegangen wird.

V-förmige Diagonalen

Im Bild 10.13 ist das Grundprinzip eines Fachwerkes mit *V-förmigen Diagonalen* dargestellt. Ein solches Fachwerk wird auch als *Warren-Fachwerk* bezeichnet, nach dem Ingenieur James Warren, der diese Tragwerksart 1848 patentieren liess. Eine Anwendung von Warren-Fachwerken findet sich entlang der Fassade des Centre Pompidou in Paris. Die Stabdimensionen sind hierbei in Abhängigkeit der Beanspruchung ausgebildet: alle Druckstäbe haben einen rohrartigen Querschnitt, während die Zugstäbe einen Vollquerschnitt mit kleinerem Durchmesser aufweisen. Wie im Kapitel 15 gezeigt wird, müssen auf Druck beanspruchte Querschnitte eine spezielle Form haben, damit diese nicht ausknicken. Dagegen können auf Zug beanspruchte Stäbe einen beliebigen Querschnitt aufweisen.



Bild 10.16: Centre Pompidou, Paris, 1971-77, Arch.: Richard Rogers & Renzo Piano, Ing.: Ove Arup (l = 60 m)

N-förmige Diagonalen

Die in den Abschnitten 10.1 bis 10.3 behandelten Fachwerke waren Beispiele für sogenannte Fachwerke mit *N-förmigen auf Druck beanspruchten Diagonalen* (Bild 10.14). Für diese Fachwerke wird gelegentlich die Bezeichnung *System Howe* verwendet. Der Ingenieur William Howe hat 1840 diesen Fachwerktyp patentieren lassen, obschon eine Tragstruktur von dieser Art bereits von Andrea Palladio fast drei Jahrhunderte früher vorgeschlagen wurde.

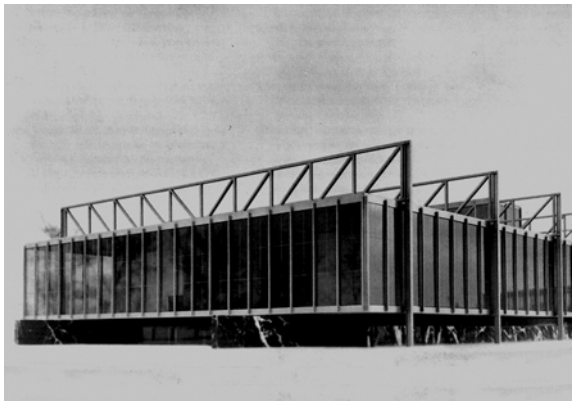


Bild 10.17: Projekt, Nationaltheater, Mannheim, 1953, Arch.: Ludwig Mies van der Rohe (l=80 m, h=8 m)

Ist dagegen die Neigung der Diagonalen von den Auflagern in Richtung Feldmitte abfallend, so wird das Tragwerk als Fachwerk mit *N-förmigen auf Zug beanspruchten Diagonalen* bezeichnet oder auch als *System Pratt* nach den Ingenieuren Caleb Pratt und seinem Sohn Thomas Willis Pratt, die diesen Tragwerkstyp 1844 patentieren liessen (Bild 10.15).

Im Gegensatz zum System Howe werden die Randfelder im System Pratt nicht durch Diagonalen, sondern durch Pfosten begrenzt. Dieser Fachwerktyp besitzt daher eine rechtwinklige Grundform, wodurch sich dieses Tragwerk leichter in eine präzise architektonische Formensprache wie etwa bei Mies van der Rohe einbinden lässt (Bild 10.17).

X-förmige Diagonalen

Eine weitere Konfiguration von Fachwerken entsteht durch Überlagerung eines Fachwerkes mit N-förmigen auf Zug beanspruchten Diagonalen mit einem Fachwerk mit N-förmigen auf Druck beanspruchten Dia-

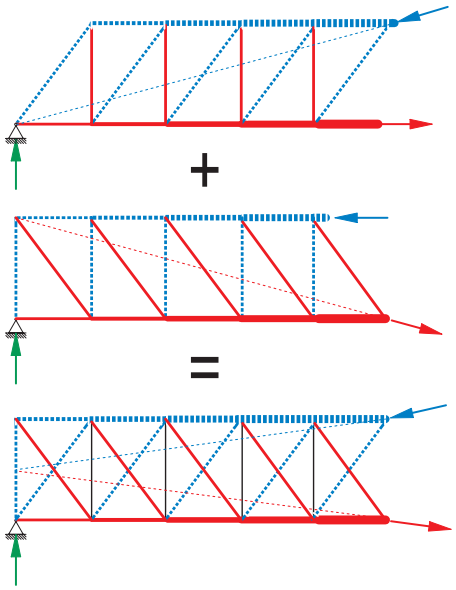


Bild 10.18: Fachwerk mit X-förmigen Diagonalen (System Long)

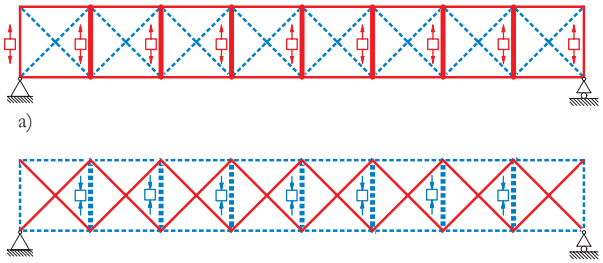


Bild 10.19: Vorspannung eines Fachwerks mit X-förmigen Diagonalen durch Zug- (a) oder Druckvorspannung (b) in den Pfosten

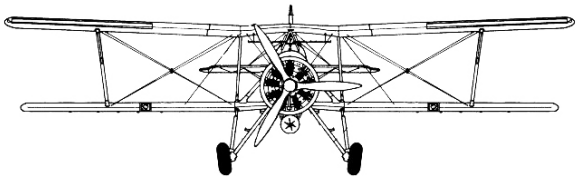


Bild 10.20: Doppeldecker Fairey Swordfish I, Grossbritannien, 1934

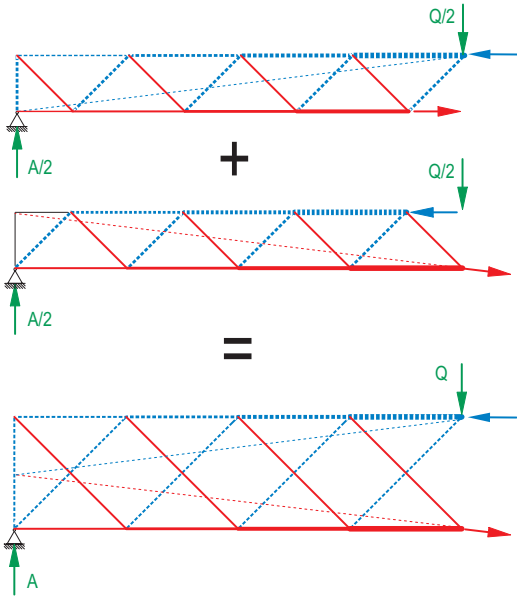


Bild 10.21: Fachwerk mit X-förmigen Diagonalen ohne Pfosten

gonalen (Bild 10.18). Es handelt sich um ein Fachwerk *mit Pfosten und X-förmigen Diagonalen*, auch als *System Long* bezeichnet nach dem Ingenieur Stephen H. Long (Patente 1830 und 1839). Dieses Tragwerk ist statisch unbestimmt, denn in jedem Feld befindet sich eine



Bild 10.22: Kristallpalast, London, 1851, Arch.: Joseph Paxton, Ing.: Fox Henderson (l = 21,97m)

überflüssige Diagonale. Unter äusseren Lasten können sich daher zwei verschiedene Tragweisen einstellen: ein Teil der Last wird vom Fachwerk mit auf Zug beanspruchten Diagonalen abgetragen, während die restliche Last vom Fachwerk mit auf Druck beanspruchten Diagonalen abgetragen wird. Die Pfosten, welche ihre Funktion für beide Tragsysteme wahrnehmen müssen, werden infolge der ersten Tragweise auf Druck und infolge der zweiten Tragweise auf Zug beansprucht. Die beiden Beanspruchungen kompensieren sich somit zum Teil, so dass die *Kräfte in den Pfosten wesentlich geringer sind als diejenigen in den Diagonalen*. Tragwerke nach dem System Long, wie etwa der Kristallpalast, weisen somit eine gewisse Redundanz auf und folglich eine recht grosse Tragsicherheit (Bild 10.22).

Die starke statische Unbestimmtheit des Systems erlaubt es, *Vorspannkräfte* in den Stäben einzuführen. Es handelt sich dabei um Kräfte, welche durch aufgezwungene Längsverformungen einzelner Stäbe vor deren Befestigung erzeugt werden. Diese sind somit vollständig unabhängig von den äusseren Lasten. Das Prinzip der Vorspannung kann einfach verstanden werden: bei einem unbelasteten Fachwerk mit X-förmigen Diagonalen, dessen Pfosten zu kurz sind, müssen diese Pfosten mittels einer Zugkraft verlängert werden bevor sie in den entsprechenden Knoten befestigt werden können. Die Zugkräfte in den Pfosten erzeugen Druckkräfte in den Diagonalen und Zugkräfte im oberen und im unteren Gurt (Bild 10.19a). Diese inneren Kräfte sind identisch mit denjenigen, die in einem statisch bestimmten Fachwerk ohne Pfosten vorhanden sind, wenn es mit nach unten gerichteten Knotenlasten im oberen Gurt und mit nach oben gerichteten Knotenlasten im unteren Gurt beansprucht wird. Wenn die Vorspannkräfte der Pfosten stets grösser bleiben als die Druckkräfte, welche infolge ständiger oder veränderlicher Lasten als äussere Kräfte auftreten, so bleiben die Pfosten auf

Zug beansprucht und können demzufolge auch mit Seilen ausgebildet werden.

Falls das Fachwerk so vorgespannt wird, dass die Pfosten ohne äussere Lasten auf Druck beansprucht sind, etwa durch zu lange Pfosten, die mit Hilfe einer Druckkraft verkürzt werden müssen bevor sie in den Knoten fixiert werden können, dann entsteht die genau umgekehrte Situation mit auf Zug beanspruchten Diagonalen und auf Druck beanspruchten Gurten (Bild 10.19b). Es ist zu bemerken, dass das gleiche Resultat durch Vorspannen der Diagonalen hätte erzielt werden können. Dieses Prinzip wurde bei den ersten Doppeldecker-Flugzeugen angewendet, wobei die beiden Tragflächen als Gurte wirkten und die vorgespannten Diagonalen aus filigranen Stahlseilen bestanden (Bild 10.20). Die Pfosten, welche stets auf Druck beansprucht wurden, waren dabei als Holzstäbe ausgebildet.

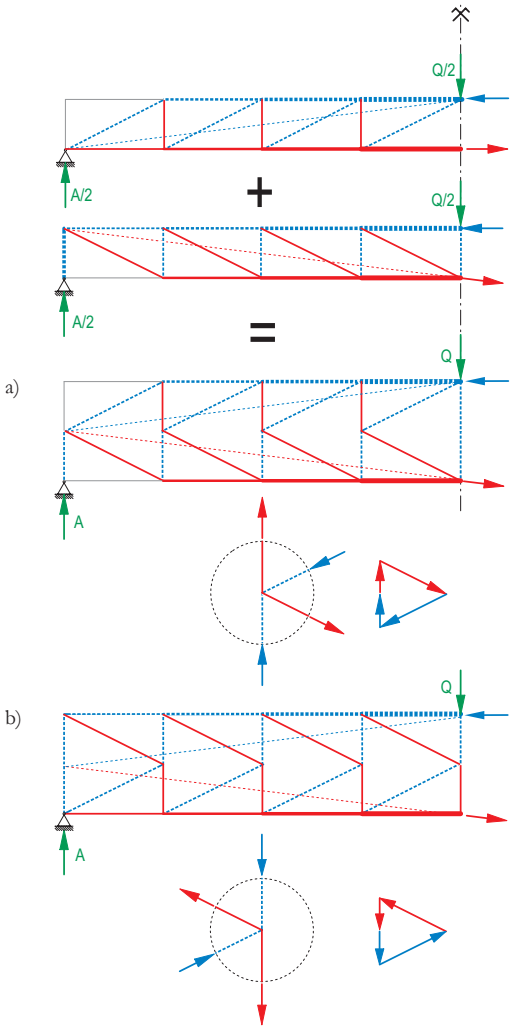


Bild 10.23: Fachwerk mit K-förmigen Diagonalen in Richtung Auflager (a) oder Feldmitte (b)

Weil in einem Fachwerk mit druck- und zugfesten Stäben die Pfosten als überflüssig betrachtet werden können, ist ein Fachwerk mit *X-förmigen Diagonalen auch ohne Pfosten* möglich (Bild 10.21). Ein solches Tragwerk kann aus der Überlagerung von zwei entgegengesetzt gerichteten Fachwerken mit V-förmigen Diagonalen gewonnen werden. Die Zuggurtkräfte des oberen und die Druckgurtkräfte des unteren Teilfachwerkes kompensieren sich, wenn jedes der beiden Teiltragwerke exakt die Hälfte der äusseren Lasten übernimmt. Sind Pfosten bei den beiden Auflagern vorhanden, dann weist das Tragwerk aber einen statischen Unbestimmtheitsgrad auf.

K-förmige Diagonalen

Eine weitere Anordnung der Diagonalen und der Pfosten ist im Bild 10.23a dargestellt: Es handelt sich um ein Fachwerk mit *K-förmigen Diagonalen*. Die Diagonalen sind in den Knoten im Mittelbereich der Pfosten miteinander verbunden und im unteren Bereich auf Druck und im oberen Bereich auf Zug beansprucht. Die oberen Diagonalen sind in Richtung des Druckelementes des Bogen-Seiltragwerks geneigt und somit auf Druck beansprucht, während die unteren Diagonalen mit entgegen gesetzter Neigung auf Zug beansprucht sind. Dies kann leicht mit Hilfe eines Subsystems überprüft werden, welches die beiden Diagonalen und die beiden Teile eines Pfostens schneidet. Auch dieses Fachwerk kann aus der Überlagerung von zwei entgegengesetzt gerichteten Fachwerken mit N-förmigen Diagonalen gewonnen werden. Auch in diesem Fall kompensieren sich die Zuggurtkräfte des oberen und die Druckgurtkräfte des unteren Teilfachwerkes, wenn jedes der beiden Teiltragwerke exakt die Hälfte der äusseren Lasten übernimmt. Ein solches Tragwerk ist statisch bestimmt, d.h. es ist möglich, die Analyse mit dem Knoten beim

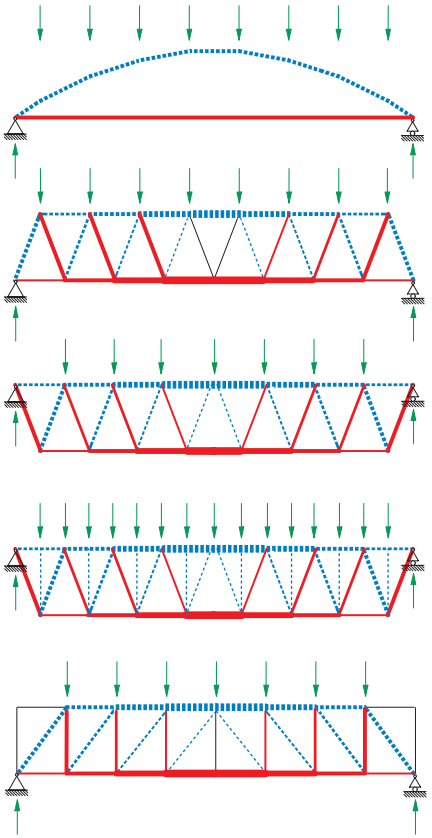


Bild 10.24: Gegenüberstellung verschiedener Fachwerksausbildungen

Auflager zu beginnen und mit Hilfe von Subsystemen alle anderen Knoten sukzessive zu behandeln, ohne dabei mehr als zwei Unbekannte gleichzeitig zu haben.
Es ist auch möglich, die Diagonalen des behandelten Tragwerks zu kehren (Bild 10.23b). In diesem Fall sind die oberen Diagonalen auf Zug und die unteren auf Druck beansprucht. Diese Konfiguration ist sehr verwandt mit der vorher beschriebenen Sie ist allerdings weniger effizient, weil die Gurte stärker beansprucht werden.

In den Bildern 10.24 und 10.25 sind die gängigsten

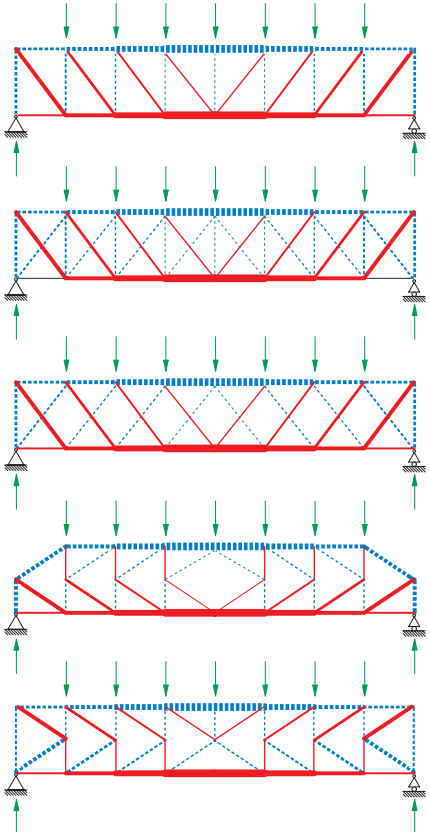


Bild 10.25: Gegenüberstellung verschiedener Fachwerksausbildungen

Fachwerkausbildungen und zum Vergleich ein Bogen-Seiltragwerk dargestellt. Die äusseren Lasten sind bei allen Tragwerken gleich, und die inneren Stabkräfte massstäblich dargestellt. Es ist ersichtlich, dass bei Fachwerken mit V-förmigen Diagonalen die ersten Diagonalen auf Druck oder auf Zug beansprucht sind, je nachdem ob die Auflager beim Unter- oder Obergurt angeordnet werden. Die Ergänzung von zusätzlichen Pfosten in einem V-förmigen Fachwerk ist nur dann sinnvoll, wenn die Lasten direkt auf dem oberen Gurt angreifen oder wenn dieser stabilisiert werden muss. Wenn grosse Lasten auf den unteren Gurt wirken, ist es zweckmässig, Pfosten anzuordnen, welche diese Lasten an die Knoten des oberen Gurtes aufhängen.

Bei N-förmigen Fachwerken mit Zugdiagonalen kann, ähnlich wie beim dargestellten Fachwerk mit V-förmigen Diagonalen, der erste Pfosten entfallen, wenn das Auflager oben angeordnet wird. Der erste Gurtstab ist unbeansprucht, wenn die Auflagerkraft vertikal ist; er kann jedoch nicht weggelassen werden, weil das Tragwerk sonst labil würde.

Das Fachwerk mit X-förmigen Diagonalen mit Pfosten hat einen statischen Unbestimmtheitsgrad von 8. Es ist ersichtlich, dass die Diagonalen, verglichen mit den anderen Fachwerken, schwach beansprucht sind. Auch Fachwerke mit X-förmigen Diagonalen ohne Pfosten sind statisch unbestimmt, sie weisen jedoch nur einen überflüssigen Stab auf. Dagegen sind die Diagonalen in einem K-förmigen Fachwerk effizienter, je stärker sich diese dem Bogen-Seiltragwerk annähern.

Einfluss der Form der Gurte auf die inneren Kräfte der Fachwerke

Die bisher behandelten Tragwerke stellen Spezialfälle dar, nämlich Fachwerke mit konstanter Höhe, also mit

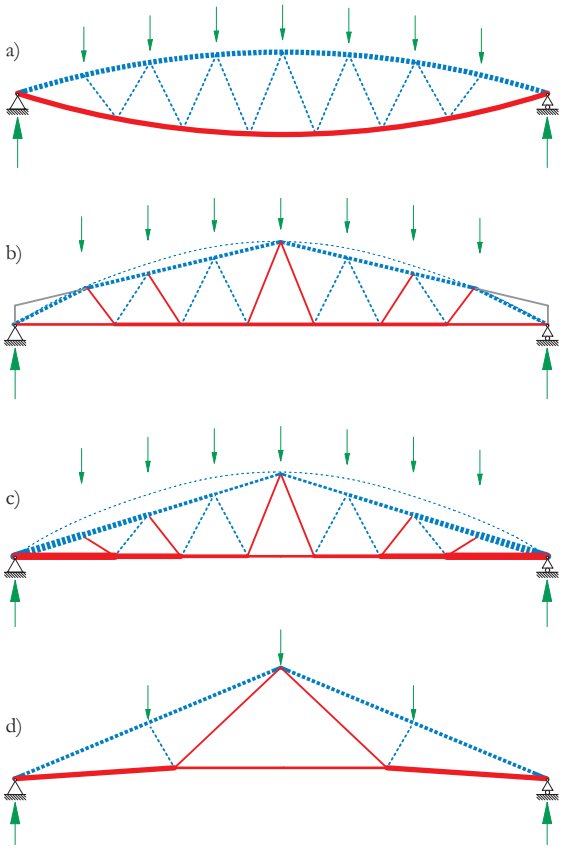


Bild 10.26: Variationen der Fachwerksform: linsenförmig (a), trapezförmig (b), dreieckförmig (c), Fachwerk System Polonceau (d)

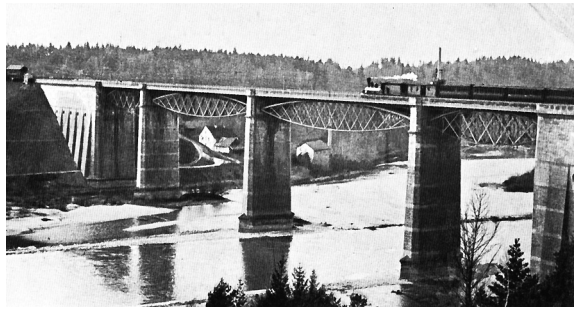


Bild 10.27: Isarbrücke bei Grosshesselohe, 1857, Arch. & Ing.: Friedrich August von Pauli, Heinrich Gerber und Ludwig Werder

parallelen Gurten, und Tragwerke, deren Gurte einem Bogen-Seiltragwerk entsprechen und die äusseren Lasten zu tragen vermögen. Bei einem solchen Tragwerk sind die Diagonalen und die Pfosten, falls überhaupt vorhanden, nicht beansprucht oder sie übertragen gemäss Bild 10.26a lediglich äussere Lasten zu den Umlenkpunkten der Gurte. Sobald jedoch zusätzlich eine veränderliche Last aufgebracht wird, verändert sich das Bogen-Seiltragwerk, was eine Beanspruchung der Diagonalen zur Folge hat.

Oft ergibt sich die Form der Fachwerke nicht aus dem inneren Kräftefluss, sondern aus anderen Erfordernissen, wie zum Beispiel dem Verlauf eines Daches. Im Bild 10.26b ist ein trapezförmiges Fachwerk dargestellt, dessen oberer Gurt einer möglichen Dachform folgt. In diesem Fachwerk ist unter verteilten Lasten der mittlere Diagonalenbereich entgegengesetzt beansprucht, verglichen mit den Fachwerken mit konstanter Höhe. Der Grund liegt darin, dass in diesem Bereich die Neigung des Bogen-Seiltragwerks kleiner ist als die Neigung des Gurtes. Im Weiteren ist die maximale Beanspruchung der Gurte nicht in Feldmitte, wo das Tragwerk am höchsten ist, sondern im Zwischenbereich wo das Verhältnis vom Abstand zwischen dem Druck- und dem Zugelement des Bogen-Seiltragwerks zur Höhe des Fachwerks maximal ist.



Bild 10.28: Gare du Nord, Paris, 1861-65, Arch.: Jakob Ignatz Hittorff

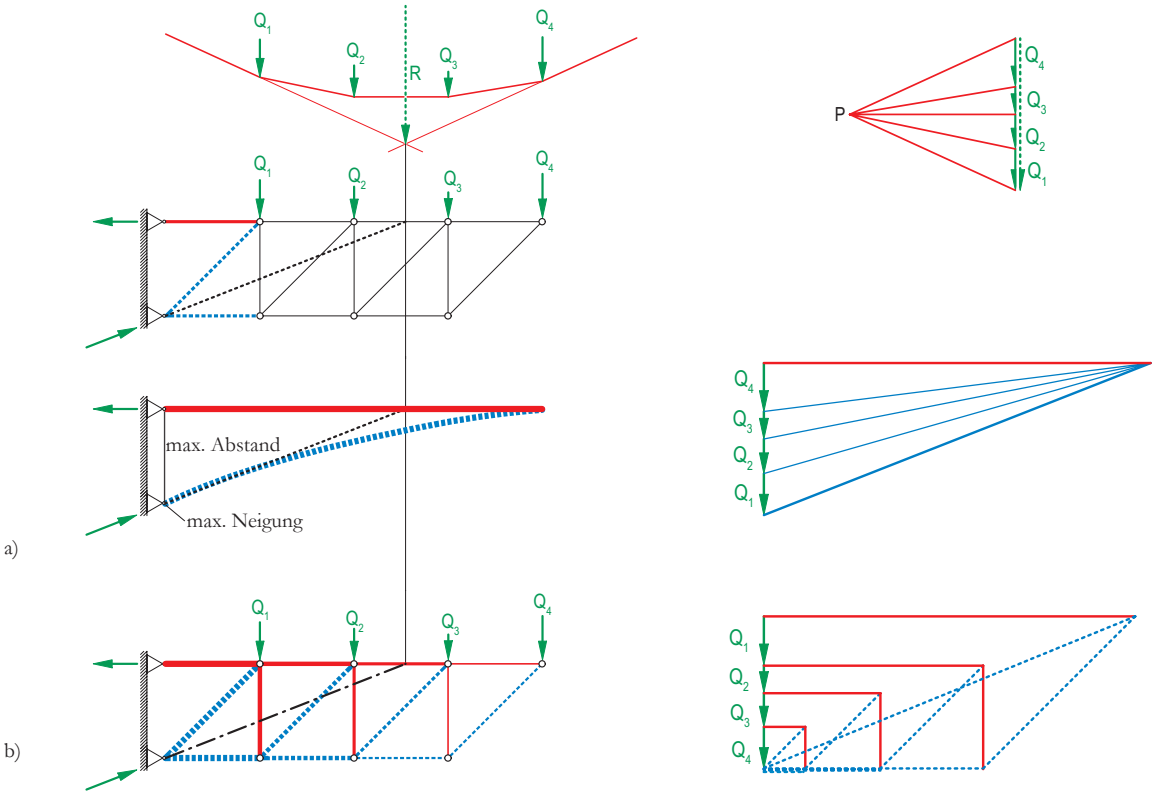


Bild 10.29: Untersuchung eines konsolartigen Fachwerks durch Ermittlung der massgebenden Gurt- und Diagonalenkräfte (a) sowie der vollständigen Analyse des Fachwerks mittels Subsystemen in jedem Knoten (b)

Im Bild 10.26c ist der Grenzfall eines dreieckförmigen Fachwerkes dargestellt, bei welchem alle Diagonalen entgegengesetzt beansprucht sind zu denjenigen des Fachwerks mit konstanter Höhe. Die maximale Gurtbeanspruchung liegt dann bei den Auflagern.

Das im Bild 10.26d dargestellte Tragwerk wird nach dem Ingenieur Camille Polonceau auch als *System Polonceau* bezeichnet. Es ist ein Spezialfall eines dreieckförmigen Fachwerkes, das als Kombination von zwei geneigten Fachwerken betrachtet werden kann, welche zu einem Bogen zusammengesetzt sind und mit einem Zugglied zusammengebunden werden. Auch in diesem Fall sind die Stäbe bei den Auflagern am stärksten beansprucht. Das System Polonceau fand in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts insbesondere bei Perron-Dächern von Bahnhöfen Anwendung, wie etwa dem Gare du Nord in Paris (Bild 10.28). Dank der Tatsache, dass die inneren Elemente überall auf Zug beansprucht sind und

deshalb durch Seile gebildet werden können, weisen diese Tragwerke eine sehr grosse Transparenz auf.

10.8 Weitere Fachwerkarten

Konsolen und Türme

Auch das im Bild 10.29 dargestellte Fachwerk kann nach dem Verfahren untersucht werden, welches weiter oben eingeführt wurde: zunächst die Untersuchung eines zugehörigen Bogen-Seiltragwerks, dann das Erkennen der der am stärksten beanspruchten Druck- und Zugstäbe und die anschliessende Ermittlung der inneren Kräfte in den Stäben mittels geeigneter Subsysteme.

Der Bogen des Bogen-Seiltragwerks erreicht den maximalen Abstand zum Zugglied im Bereich der Auflager (Bild 10.29a). Die in diesem Bereich liegenden Gurtstäbe des Fachwerks sind somit am stärksten beansprucht. Aus der Neigung des Bogens des Bogen-Seiltragwerks ist zudem ersichtlich, dass alle Diagonalen auf Druck beansprucht sind und dass diejenigen im Bereich der Auflager am stärksten beansprucht werden. Es ist auch

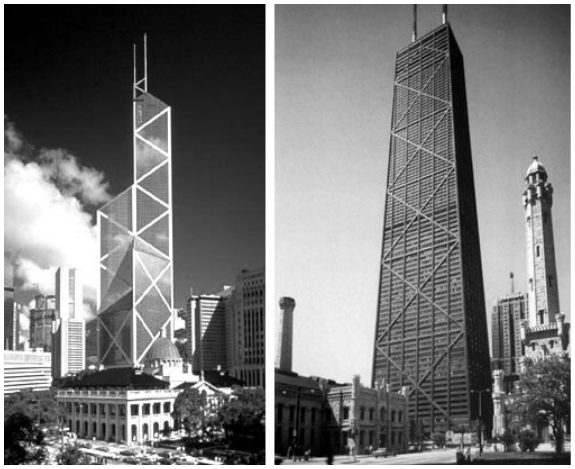


Bild 10.30: Bank of China, Hong Kong, 1989, Arch.: I.M. Pei, Ing.. Robertson, Fowler and Associates (h = 369 m); John Hancock Center, Chicago, 1969, Arch.: Skidmore, Owings & Merrill, Ing.: F. Kahn (h = 344 m)

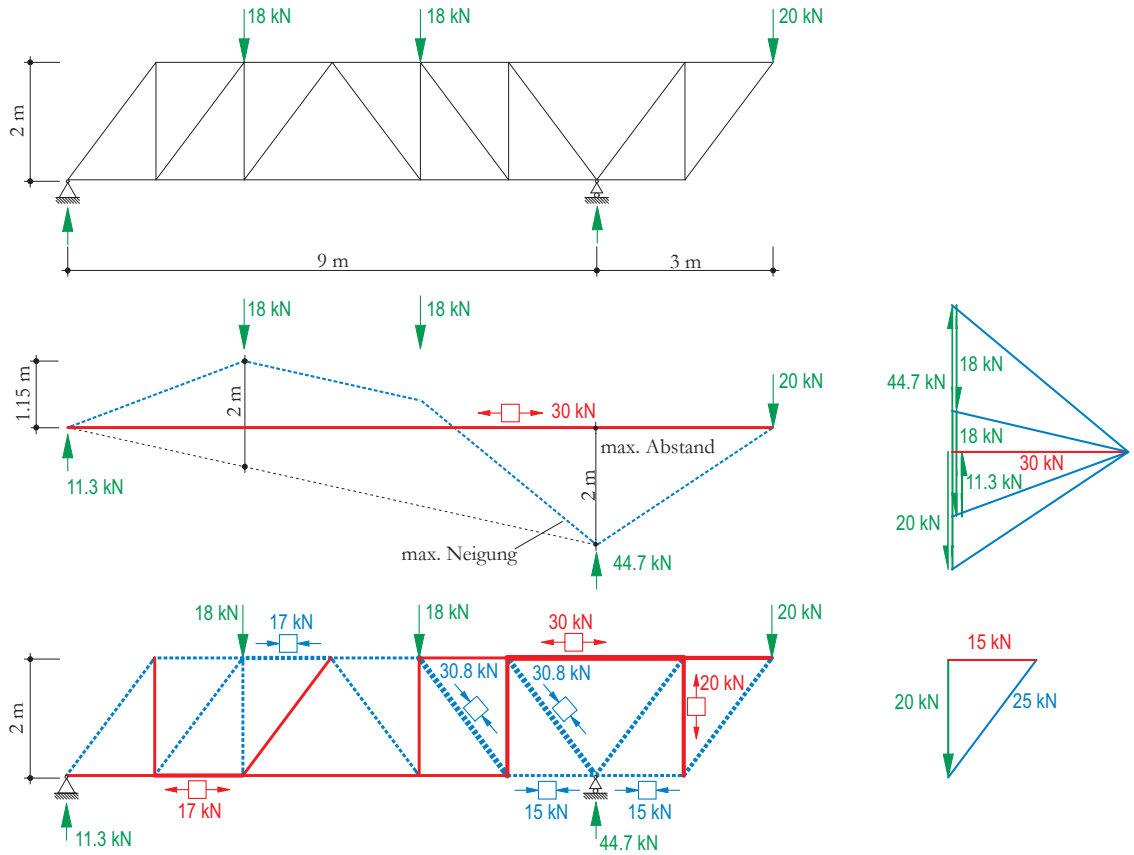


Bild 10.31: Innere Kräfte in einem Fachwerk mit Konsole

möglich, einen Knoten nach dem andern zu untersuchen und mit Hilfe das Cremonaplanes die Beanspruchungen aller Stäbe gemäss Bild 10.29b zu ermitteln.

Türme und Hochhäuser tragen die horizontalen Wind- und Erdbebenkräfte als vertikal angeordnete Konsolen ab (vgl. Bild 8.21). Wenn die Tragwerksform nicht diesem Bogen-Seiltragwerks entspricht, so sind *Diagonalen unentbehrlich* und als Tragwerk resultiert dann ein Fachwerk. Bekannte Beispiele hierfür sind die Bank of China in Hong Kong oder auch das John Hancock Center in Chicago (Bild 10.30). Bei beiden Gebäuden ist das Fachwerk in die Fassadenebene integriert. Das Fachwerk kann aber auch im Gebäudekern liegen, wie etwa beim im Bau befindlichen Burj Dubai.

Einfache Fachwerke mit Konsolen

Wie im Abschnitt 8.5 gezeigt, können Konsolen mit über zwei Auflager gespannten Tragwerken kombiniert werden. Im Bild 10.31 ist die Ermittlung der Stabkräf-

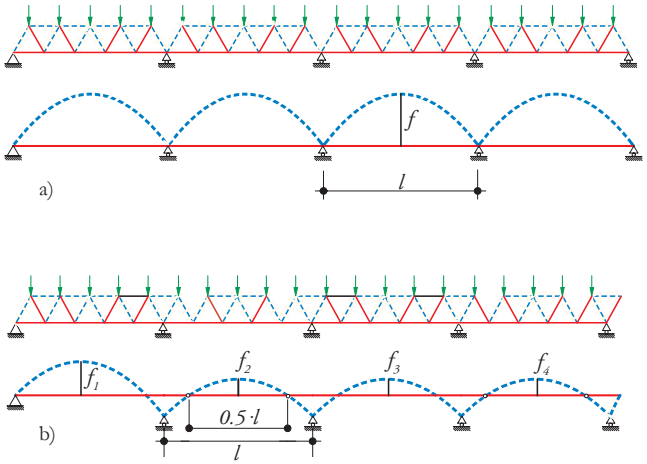


Bild 10.32: Serie von einfachen Fachwerken (a) und Gerberträger (b)

te in einem entsprechenden Tragwerk dargestellt. Der Abstand zwischen dem Bogen und dem Seil des Bogenseiltragwerks ist maximal links vom rechten Auflager. In diesem Bereich ist die Zuggurtkraft maximal, und sie entspricht 30 kN, also exakt der Zugkraft des Zugelementes des Bogen-Seiltragwerkes. Die Druckgurtkraft über dem rechten Auflager ist theoretisch gleich gross, allerdings auf einer Strecke mit Länge null, d.h. im Auflagerpunkt selbst. Wird nämlich die Horizontalkomponente der Diagonalenkraft (15 kN) zur Stabkraft im

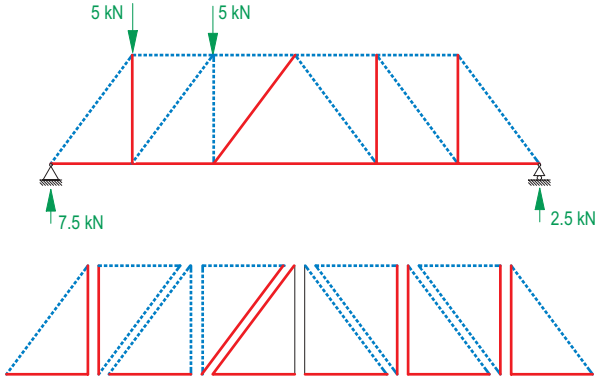


Bild 10.33: Fachwerk als eine Folge von Konsolen

angrenzenden Gurtstab (15 kN) addiert, so resultiert eine Druckkraft von 30 kN.

Die maximale Zuggurtkraft im Feld, sowie auch die zugehörige Druckgurtkraft, wird mit Hilfe der Betrachtung ermittelt, dass die Gurtkräfte sich proportional zum Abstand zwischen Bogen und Seil des Bogen-Seiltragwerks verhalten. Die Neigung des Bogens des Bogen-Seiltragwerks ist maximal im gesamten Konsolenbereich. Die Diagonalenkraft resultiert aus dem Knotengleichgewicht beim Angriffspunkt der Konsolenlast von 18 kN und die Pfostenkraft entspricht in diesem Bereich der Konsolenlast.

Über mehrere Auflager verlaufende Fachwerke

Im Bild 10.32 sind Fachwerke zu den in den Bildern 8.27 und 8.29 dargestellten Bogen-Seiltragwerken ergänzt. Die Effizienz des Gerberträgers wird nun offensichtlich, denn unter der Voraussetzung gleicher Spannweiten und gleicher Lasten ist die totale Pfeilhöhe der Bögen bei den aneinander gereihten einfachen Tragwerken und beim Gerberträger identisch. Bei der Serie von einfachen Tragwerken ist jedoch der maximale Abstand zwischen Bogen und Seil wesentlich grösser. Das bedeutet, dass beim als Gerberträger ausgebildeten Fachwerk die *maximalen Gurtkräfte wesentlich geringer* sind. Es ist allerdings zu bemerken, dass ähnlich wie beim Tragwerk im Bild 10.31 beim Gerberträger die Gurte auch über den Auflagern beansprucht werden, und zwar im unteren Gurt auf Druck und im oberen Gurt auf Zug.

Rahmenartige Fachwerke

Alle in diesem Kapitel behandelten Tragwerke sind zusammengesetzt aus einer Folge von Konsolen (Bild 10.33). Die behandelten Tragwerke weisen dabei die Besonderheit auf, dass die Konsolen, aus welchen sie bestehen, linear angeordnet sind, d.h. auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Falls dies nicht mehr der Fall ist, sondern das Tragwerk eine polygonale Form annimmt, wird von einem Bogen oder von einem *Rahmen* gesprochen. Dabei basiert die Unterscheidung zwischen Bo-

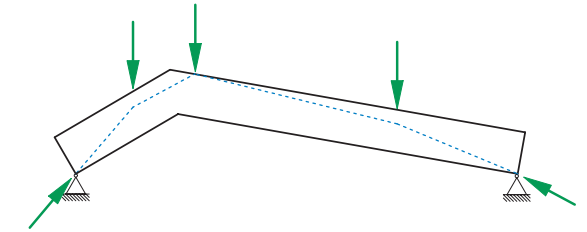
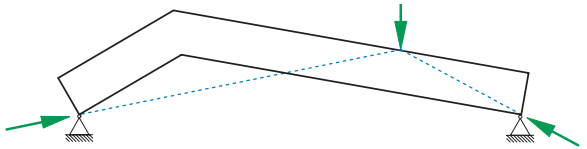
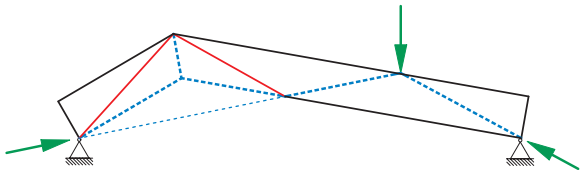


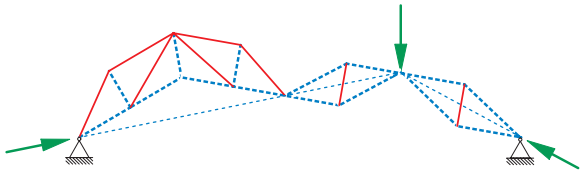
Bild 10.34: Bogentragwirkung bei einer innerhalb des Materials verlaufenden Drucklinie



a) Drucklinie im Rahmen



b) Umlenkung der Drucklinie



c) Kraftausbreitung

Bild 10.35: Rahmentragwirkung bei einer ausserhalb des Materials verlaufenden Drucklinie

gen und Rahmen lediglich auf der Anordnung der äusseren Lasten und der daraus resultierenden Drucklinie. Wie im Kapitel 6 gezeigt wurde, muss bei Bögen die Form so gewählt werden, dass die Drucklinie innerhalb des Materials liegt und zudem die Festigkeit nirgends überschritten wird (Bild 10.34). Bei einem polygonal geformten Rahmen mit Lastanordnung gemäss Bild 10.35a ist ein solcher Druckverlauf in der Regel nicht mehr möglich. Fällt die Drucklinie daher ausserhalb des Materials, so trägt das Tragwerk nicht mehr als Bogen, sondern als Rahmen. Es werden dann nebst den inneren Druckkräften auch innere Zugkräfte erzeugt. Mit Hilfe dieser Zugkräfte wird die Drucklinie so *umgelenkt*, dass sie im Inneren des Materials verbleiben kann (Bild 10.35b). Durch Ausbildung eines Fachwerks können die inneren Kräfte des Rahmens anschliessend, wie in Abschnitt 10.1 gezeigt, über die gesamte Rahmenbreite *verteilt* werden (Bild 10.35c).

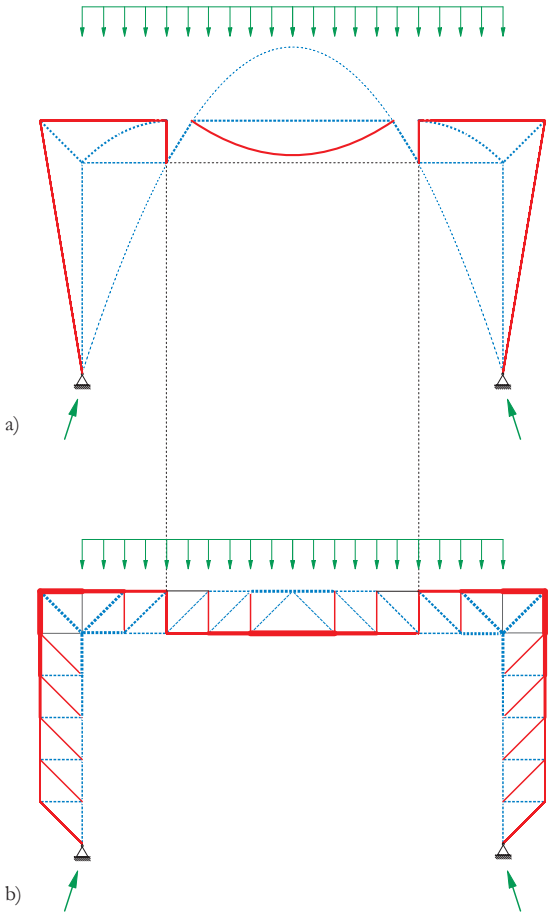


Bild 10.36: innere Kräfte in einem rechteckigen Rahmen (a) und mögliche Ausbildung als Fachwerkrahmen (b)

Im Bild 10.36 ist ein rechtwinkliges Rahmentragwerk dargestellt, welches als Fachwerk ausgebildet ist. Da die globale Tragwirkung mit einer bogenartigen Drucklinie ohne Zugelement beschrieben wird (gestrichelte Linie), weisen die Auflagerkräfte horizontale Komponenten auf. Die Pfeilhöhe der Drucklinie kann in diesem Fall frei gewählt werden, d.h. das Tragwerk ist wie der Zweigelenkbogen statisch unbestimmt. Die Drucklinie wird wiederum mit Hilfe von Zugelementen ins Innere des Materials zurück verschoben (Bild 10.36a). Aus dem so gebildeten Bogen-Seiltragwerk kann die Tragwirkung des Fachwerkes erkannt und Lage und Intensität der am stärksten beanspruchten Fachwerkstreben ermittelt werden (Bild 10.36b). Dieses Wissen kann anschliessend zur Dimensionierung der Stäbe verwendet werden, wie etwa beim aus vorfabrizierten Elementen zusammengesetzten Fachwerksrahmen im Patera Building von Michael Hopkins (Bild 10.37).

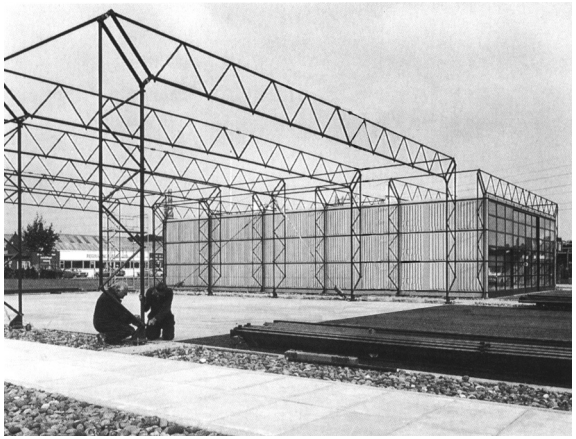


Bild 10.37: Patera Building, Stoke on Trent, 1980-82, Arch.: Michael Hopkins, Ing.: Anthony Hunt

Fachwerke für andersartige Tragwerksformen

Einige in diesem Skript behandelte Tragwerksformen können bei genauerer Betrachtung auch als Fachwerke betrachtet werden. Zum Beispiel das System Jawerth, ein Seilbalken, welcher als ein auf Zug beanspruchtes Fachwerk verstanden werden kann, so dass die Gurte nie Druckkräfte erhalten (Bild 3.18). Ein weiteres Beispiel sind die als Fachwerk ausgebildeten Seile welche die seitlichen Felder der Tower Bridge in London tragen (Bild 3.27). Auch der Bogen, die Stützen und die Fahrbahn der vom Büro Eiffel erstellten Brücke Maria Pia in Porto (Bild 6.23) oder die Bogen und Seile der Elbe-Brücke in Hamburg stellen Fachwerke dar (Bild 8.6). Der Eiffelturm in Paris kann global als ein Bogen-Seiltragwerk betrachtet werden (Bild 8.21). Dieses

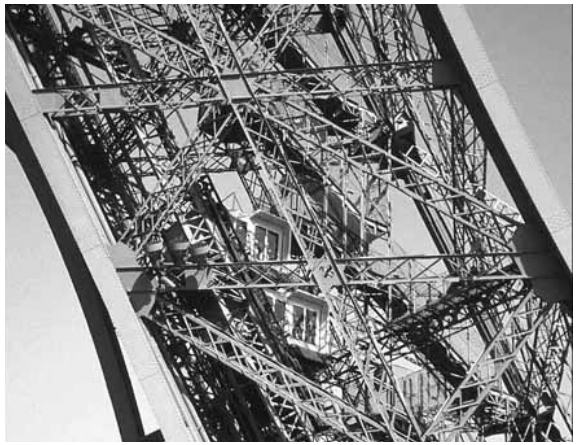


Bild 10.38: Eiffelturm, Paris, 1887-89, Arch.: Büro Eiffel, Ing.: Maurice Koechlin

Bogen-Seiltragwerk besteht selbst aber aus einer Vielzahl von Fachwerken (Bild 10.38). So sind die Gurte aus vier Stäben zusammengesetzt, welche mit Diagonalen verbunden sind, die ihrerseits auch wiederum aus Fachwerken bestehen. Bei der Tragwerksbetrachtung muss daher zwischen der *Globalform* und der *lokalen Ausformung* der Elemente der Golbalform unterschieden werden.

11 Räumliche Fachwerke

Als räumliche Fachwerke werden im Folgenden Tragwerke verstanden, welche aus räumlich angeordneten Druck- und Zugstäben bestehen, die in Knoten gelenkig miteinander verbunden sind. Die Stäbe sind gerade und weisen nur axiale Druck- oder Zugkräfte auf, und die äusseren Lasten greifen in den Knoten an.

11.1 Räumlich zusammengesetzte ebene Fachwerke

Fachwerke werden im Hochbau häufig zur Bildung von ebenen Überdachungen verwendet. Eine einfache Lösung besteht in der Anordnung einer *Serie von Fachwerken* parallel zur Dachebene, welche als *Primärtragwerk* wirken. Die ständigen und die veränderlichen Lasten werden von einem *System von Sekundärelementen* bis zu den Fachwerken getragen, welche ihrerseits die Lasten zu den an den Rändern der Überdachung angeordneten Auflagern abtragen (Bild 11.1a).

Wie das Beispiel des Boden- respektive Deckenaufbaus des World Trade Centers zeigt (Bild 11.2), kann das Sekundärsystem aus Balken oder Platten bestehen und an den unteren Gurten angehängt sein, auf den oberen Gurten aufgelegt oder abwechselnd am oberen und am unteren Gurt befestigt sein, wie dies beim so genannten Shed-Dach der Fall ist.

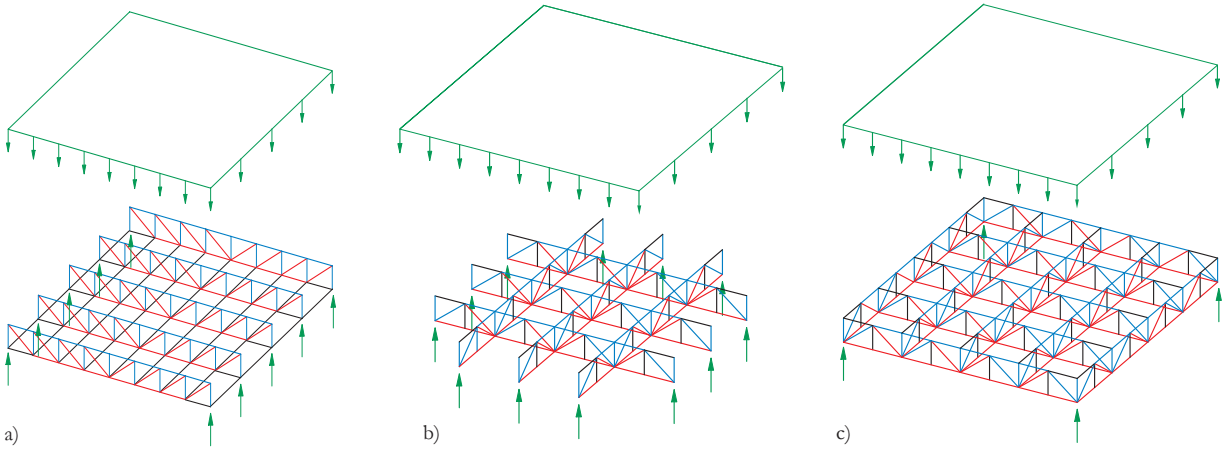


Bild 11.1: Primärtragwerk, bestehend aus in parallelen Ebenen angeordneten Fachwerken (a) und Trägerrost aus Fachwerken mit Auflagern an allen Seiten (b) sowie mit Auflagern nur in den Ecken (c)

Eine Alternative zu den parallel angeordneten Fachwerken besteht darin, *zwei Serien von Fachwerken rechtwinklig zueinander* anzuordnen, so dass ein so genannter Trägerrost entsteht (Bild 11.1b). Die zweite Serie von Fachwerken ersetzt die Balken des im vorherigen Beispiel beschriebenen Sekundärsystems. Diese zusätzlichen Fachwerke tragen jedoch die Lasten nicht nur bis zu den anderen Fachwerken ab, sondern übertragen einen Teil der Lasten direkt zu ihren Auflagern. Es sind somit, im Falle einer rechteckigen Überdachung, *verteilte Auflager an allen Enden* erforderlich. Bei einem solchen Tragwerk müssen die Lasten nicht unbedingt in der gleichen Richtung bis zu den Auflagern abgetragen werden. Eine Last kann alternativ auch *in diagonaler Richtung abgetragen* werden (Bild 11.3), so dass die

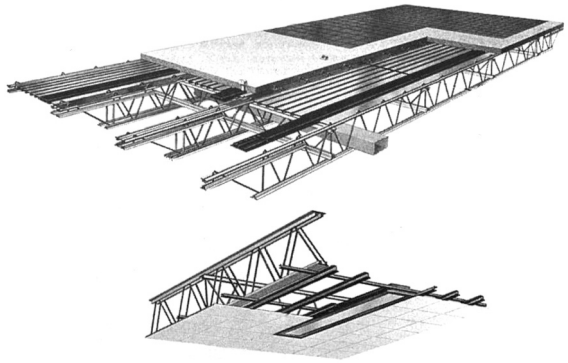


Bild 11.2: Bodenaufbau, World Trade Center, New York, 1966-73, Arch.: Minoru Yamaski, Ing.: John Skilling and Leslie Robertson



Bild 11.3: Airside Center Flughafen Zürich, 2003-04, Arch.: Grimshaw Architects, Ing.: Basler + Partner & Arup

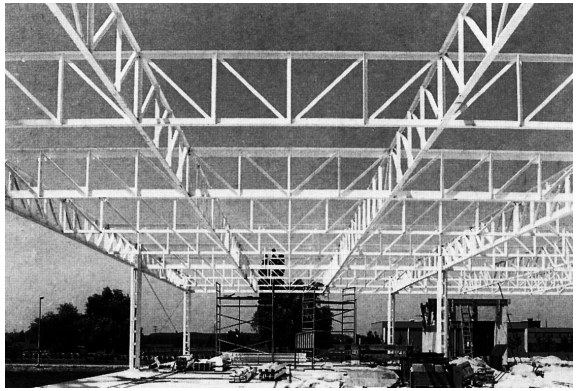


Bild 11.4: USM-Fabrik, Münsingen, 1962-64, Arch.: Bruno und Fritz Haller, Ing.: Emch + Berger

Auflager einer rechteckigen Überdachung zum Beispiel nur in den vier Ecken angeordnet werden können (Bild 11.1c).

Beim im Bild 11.4 dargestellten Beispiel der Fabrikationshalle sind die Fachwerke im Abstand von 4.8 m in einem quadratischen Raster angeordnet und jeweils in den 4 Ecken eines quadratischen Moduls von 14.4 m aufgelagert. Diese Module können so angeordnet werden, dass ein Trägerrost von beliebigen Abmessungen entsteht, welcher nur alle 14.4 m, sowohl an der Aussenkante wie auch im Innern, aufgelagert ist.

11.2 Raumfachwerke

Die Effizienz der Trägerroste aus Fachwerken kann wesentlich gesteigert werden, wenn die Diagonalen so angeordnet werden, dass sie überall mit in beide Richtungen verlaufenden Gurten verbunden sind (Bild 11.5). Es entsteht dann ein wirklich räumliches Tragwerk, bei welchem die Diagonalen nicht nur Dreiecke bilden, wie bei den ebenen Fachwerken, sondern *Tetraeder* oder *Pyramiden*, wie am Beispiel des dvg-Verwaltungsgebäudes in Hannover gut zu sehen ist (Bild 11.7).

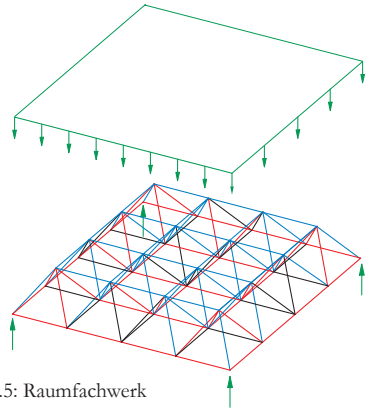


Bild 11.5: Raumfachwerk

Das erste Tragwerk dieser Art wurde vom Physiker Alexander Graham Bell vorgeschlagen, welcher besser als Erfinder des Telefons bekannt ist. Er erhielt 1904 ein Patent für vorfabrizierte Tetraeder in Stahl, die so zusammengesetzt werden konnten, dass *Raumfachwerke verschiedener Formen* entstanden (Bild 11.6). Die daraus entstehende Tragstruktur ist so leicht, dass Bell diese zum Bau von Flugdrachen verwendete.

In der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts wurden verschiedene Systeme zur Konstruktion von Raumfachwerken mit industriell herstellbaren standardisierten Knoten und Stäben entwickelt. Am bekanntesten

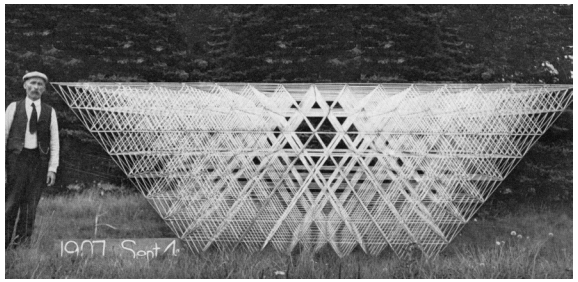


Bild 11.6: Verbunddrachen als Raumfachwerk aus vorfabrizierten Tetraedern von Alexander Graham Bell, 1904

ist das ‚System Mero', welches Ende der 1950er Jahre vom Ingenieur Max Mengeringhausen aus der Studie der Geometrie natürlicher Kristallstrukturen entwickelt wurde. In einem einzelnen Knoten können in diesem System bis zu 18 rohrförmige Stäbe zusammengeführt werden, was eine grosse Flexibilität bei der Konstruktion von Raumfachwerken und eine schnelle Montage ermöglicht (Bild 11.8).

Durch das räumliche Verbinden der Gurte wird die *Last flächig verteilt,* und hierdurch die Tragwirkung der Gesamtstruktur verbessert. *Mit Raumfachwerken können deshalb grosse Spannweiten überbrückt werden.* Ein

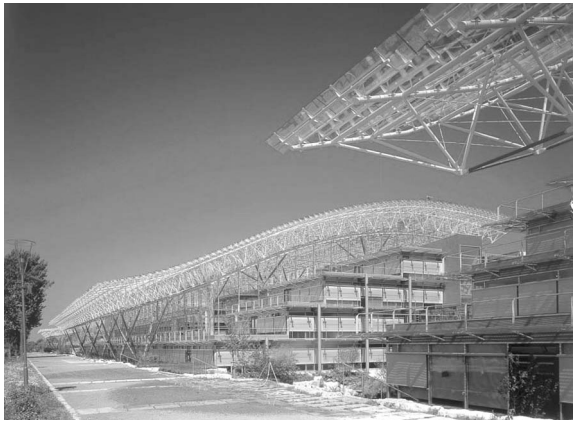


Bild 11.7: dvg-Verwaltungsgebäude, Hannover, 2000, Arch.: Hascher + Jehle, Ing.: Weischede, Hermann und Partner

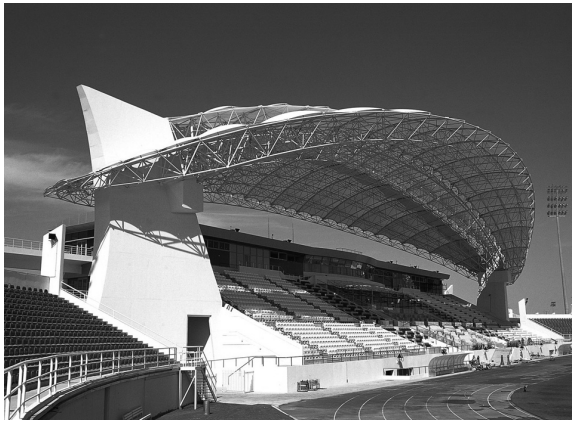


Bild 11.8: Sheikh Khalifa Stadium, Al Ain, 2002-03, Arch.: Rice Perris Ellis (l = 130 m), Ing.: Mero TSK International

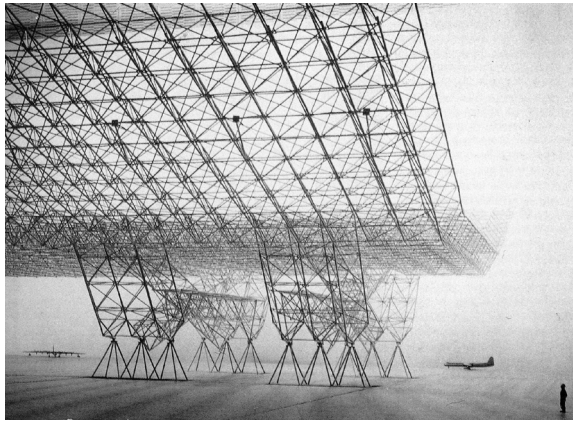


Bild 11.9: US Air Force Hangar Projekt, 1951, Arch.: Konrad Wachsmann

beeindruckendes Beispiel hierfür ist das in Bild 11.9 dargestellte Projekt einer Fugzeughalle, welche im Jahre 1951 vom Militärflugwesen der Vereinigten Staaten an Konrad Wachsmann in Auftrag gegeben wurde.

Das Ziel bestand darin, in kurzer Zeit und in einer beliebigen Situation ein grosses Tragwerk mit Auskragungen bis zu 50 m zu erstellen, wobei nur standardisierte Elemente verwendet werden durften, welche sich leicht transportieren lassen, nicht mehr als 5 kN wiegen und nicht grösser als 1 x 3 x 1 m sein durften. Die aus diesen Elementen zu errichtenden Gebäude sollten zerlegbar und ohne Materialverlust an anderer Stelle beliebig wiederverwendbar sein. Als besondere Anforderungen an das Tragwerk waren neben den sehr grossen Auskragungen zudem stützenfreie Aussenseiten vorgesehen.

11.3 Gewölbe und Kuppeln aus Fachwerken

Sowohl Balkenroste aus Fachwerken als auch Raumfachwerke können als aufgelöste räumliche Tragwerke für Gewölbe und Kuppeln dienen (vgl. Abschnitt 7.8). Beispiele hierfür sind die Serie von acht Flugzeughallen für die italienische Luftwaffe, welche Pier Luigi Nervi zwischen 1935 und 1941 errichten konnte. Im Bild 11.10 ist die 1940 erbaute Halle in Marsala dargestellt. Die klostergewölbeartige Tonne aus vorfabrizierten Elementen aus Stahlbeton war als ein Raumfachwerk auf 6 Punkten aufgelagert und hatte die Abmessungen 100 m x 40 m. Alle acht Hallen wurden 1944 bei Luftangriffen zerstört.

Die womöglich berühmteste Kuppel aus Fachwerk entstand 1967 im Rahmen der Weltausstellung in Montreal als Tragwerk für den Pavillon der Vereinigten Staaten. Buckminster Fuller entwarf die zu dieser Zeit grösste sphärische Kuppel, deren Oberfläche aus einem Raumfachwerk bestand (Bilder 11.11 und 7.51). Der Durchmesser der Kuppel betrug über 76 m, die Höhe 61 m und das Innenvolumen 190'000 Kubikmeter. Die Kuppel war damit grösser als die Kuppel des Petersdom.

Das Traggerüst bestand aus Stäben, die auf der Aussenseite Dreiecke und auf der Innenseite Sechsecke bildeten und mittels Zwischenstäben zu 5900 Knoten zusammengeschweisst wurden. Die Aussenhaut bestand aus getöntem Acrylglas. Das Gebäude brannte 1976 ab, wurde 1999 jedoch wieder aufgebaut, und wird heute als Museum genutzt.

11.4 Freie Formen aus Fachwerken

Auf Grund der *geometrischen Flexibilität* und der *grossen Tragfähigkeit* sind die räumlichen Fachwerke zur Ausbildung von frei geformten, doppelt gekrümmten Flächen geeignet. Ein gebautes zeitgenössisches Beispiel für eine solche Anwendung ist die BMW-Welt von Coop Himmelb(l)au aus dem Jahr 2007 (Bild 11.12). Das Raumfachwerk des komplex geformten Dachs variiert dabei in seiner Tiefe zwischen 2 m und 12 m in Abhängigkeit der inneren Kräfte. Zur Eingangsfassade hin läuft das räumliche Dach in einen flächigen Doppelkegel aus, wodurch sich das Tragverhalten von einem Raumfachwerk in eine Schale verändert.



Bild 11.10: Birgi Flugzeughalle, Marsala, 1940, Arch. & Ing.: Pier Luigi Nervi



Bild 11.11: US Expo-Pavillion, Montreal, 1967, Arch. & Ing.: Richard Buckminster Fuller & Shoji Sadao



Bild 11.12: BMW-Welt, München, 2001-07, Arch.: Coop Himmel b(l)au, Ing.: Bollinger + Grohmann

12 Balken und Scheiben

Bei der Berechnung der inneren Kräfte von Fachwerkträgern wurde angenommen, dass jeder der Stäbe des Fachwerks mit einer in Achsenrichtung zentrisch wirkenden Kraft beansprucht wird (vgl. Kapitel 10). Diese Annahme ermöglicht es, die Belastung auf einfache Art systematisch mit Hilfe des Cremonaplans zu ermitteln.

Bereits in Abschnitt 5.3 wurde zudem im Zusammenhang mit der Definition der Spannung σ darauf hingewiesen, dass die in einem Element wirkende innere Kraft sich stets auf das gesamte zur Verfügung stehende Material verteilt. Die genaue Verteilung ist im Allgemeinen abhängig von der Geometrie und dem Material des Elements. In einer ersten Näherung kann aber angenommen werden, dass die Belastung gleichmässig auf den Querschnitt verteilt wird, wenn die Stabachse durch den Schwerpunkt des Querschnitts verläuft (Bild 12.1). Auf dieser Annahme basiert die Definition der Spannung σ als eine auf die gesamte Querschnittsfläche bezogene Kraft. Durch die Verteilung der Belastung im Material erzeugt jede innere Kraft also einen Belastungsbereich, ein sogenanntes *Spannungsfeld*.

Im vorliegenden Kapitel wird gezeigt, dass *Balken*, *Rahmen* und *Scheiben* als Fachwerke interpretiert werden können, deren Gurte, Pfosten und Diagonalen solange verbreitert werden, bis sie sich gegenseitig berühren und somit ein kontinuierliches Material entsteht. Diese Betrachtungsweise, deren theoretische Begründung auf dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie beruht und den Rahmen dieser Einführung übersteigt, führt zu so genannten *diskontinuierlichen Spannungsfeldern*, wobei die Resultierenden der Spannungsfelder die inneren Kräfte im Fachwerk darstellen.

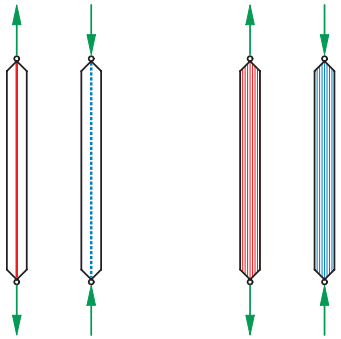
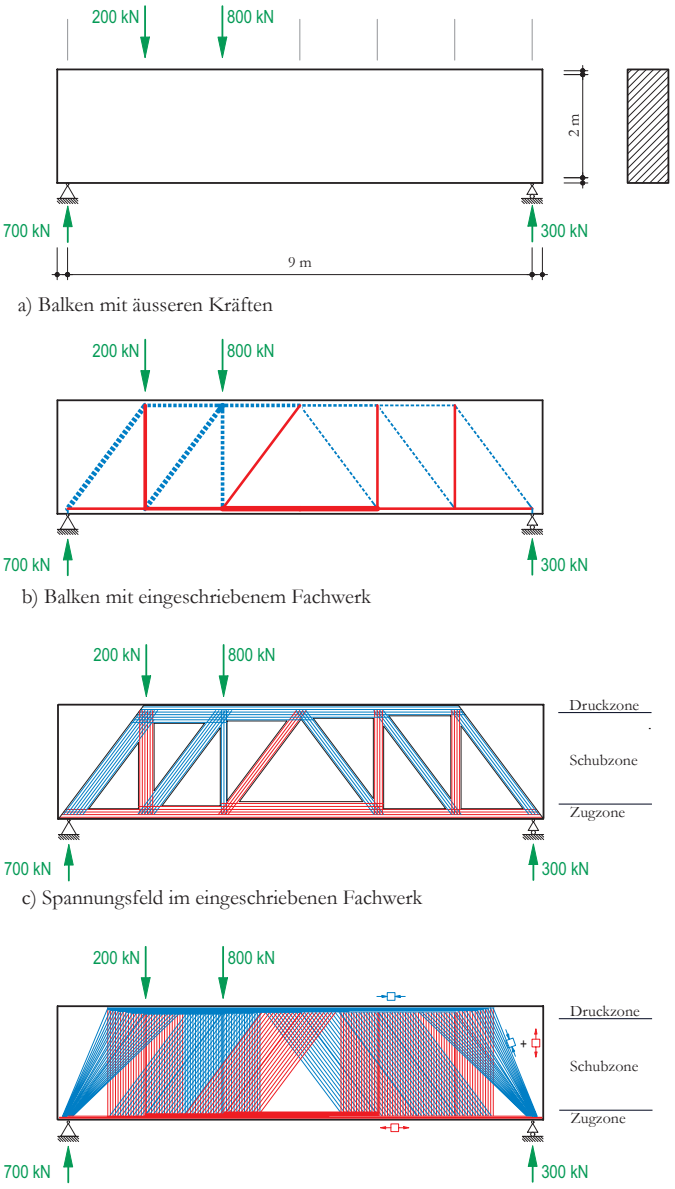


Bild 12.1: Spannung in einem Stab als gleichmässige Verteilung der Belastung über den Querschnitt

12.1 Tragverhalten eines einfachen Balkens

Im Bild 12.2a ist ein einfacher Balken dargestellt, welcher bezüglich Geometrie und äusseren Lasten dem im Abschnitt 10.3 behandelten Fachwerk entspricht. Die Eigenlasten des Balkens seien wiederum vernachlässigt. Die Balkenhöhe und -länge sind gegenüber dem Fachwerk etwas grösser gewählt worden, so dass dieses direkt in den Balken eingeschrieben werden kann (Bild 12.2b). Die oberen auf Druck beanspruchten Gurtstäbe des eingeschriebenen Fachwerks stellen die *Druckzone* des Balkens dar, die unteren Gurtstäbe entsprechen der *Zugzone*, während die Kräfte der Diagonalen und Pfosten beim Balken von der dazwischen liegenden *Schubzone* aufgenommen werden (Bild 12.2c).

Die Druckzone und die Zugzone bleiben nicht an die linienförmigen Gurte des Fachwerks gebunden, sondern erstrecken sich über das zur Verfügung stehende Material. Die Beanspruchung schmiegt sich an den oberen und unteren Rand an, so dass der Abstand zwischen Druck- und Zuggurt, welcher als *wirksame Höhe* bezeichnet wird, im Sinne einer Optimierung der statischen Effizienz möglichst gross wird. Die effektiv vorhandene Verteilung der Spannungen, sowohl in der Zugzone als auch in der Druckzone, hängt vor allem vom Verhalten des Materials des Balkens ab. Im Rahmen dieses Kurses wird gemäss Bild 12.1 als Vereinfachung, wie in der Einleitung erwähnt, eine konstante



a) Balken mit äusseren Kräften

b) Balken mit eingeschriebenem Fachwerk

c) Spannungsfeld im eingeschriebenen Fachwerk

d) Spannungsfeld im Balken

Bild 12.2: Einfacher Balken mit eingeschriebenem Spannungsfeld

Spannungsverteilung sowohl in der Druck- als auch in der Zug- und Schubzone angenommen. Dies entspricht in der Tat dem Verhalten eines Balkens mit einem perfekt duktilen Material wie zum Beispiel Stahl unter sehr grossen äusseren Lasten (vgl. Abschnitt 5.7). Es wird dabei davon ausgegangen, dass die Druck- und die Zugzone sich im Bereich der maximal beanspruchten Fachwerkstäbe in der plastischen Phase mit kompletter Ausnützung des Materials befinden.

Auch die Diagonalen und Pfosten des eingeschriebenen Fachwerks sind somit eine Vereinfachung der tatsächlich vorhandenen inneren Kräfte. Das Material zwischen den einzelnen Diagonalen nimmt ebenfalls einen Teil der Beanspruchung auf, oder anders ausgedrückt, die *Diagonalen* können sich so stark *ausbreiten*, bis sie sich gemäss Bild 12.2d gegenseitig berühren. Die inneren Kräfte des eingeschriebenen Fachwerks im Bild 12.2b können daher als resultierende innere Kräfte des im Bild 12.2d dargestellten Spannungsfeldes interpretiert werden.

Aus der Darstellung ist ersichtlich, dass sowohl in der Druck- als auch in der Zugzone einachsige Spannungsverteilungen herrschen. In der Schubzone sind die Verhältnisse dagegen komplizierter: hier sind unbeanspruchte Bereiche vorhanden, Bereiche die durch Zug oder Druck beansprucht werden, aber auch Bereiche, in denen sich die Spannungsbereiche der Druck und der Zugstreben überlagern. Eine ähnliche Situation ist auch bereits bei den Membranen und Schalen aufgetreten, bei welchen derselbe Materialteil zugleich in zwei verschiedene Richtungen beansprucht war.

In einem Balken können zu einer gegebenen Lastsituation unendlich viele verschiedene Fachwerke eingeschrieben werden, da ein Balken als ein kontinuierliches Tragwerk innerlich unendlichfach statisch unbestimmt ist, d.h. aus einer unendlichen Anzahl von Stäben und Knoten besteht. *Die Lösung ist somit nicht eindeutig.* Diese Erkenntnis führt zu einer gewissen *Freiheit beim Tragwerksentwurf.* Eine physikalische Erklärung für diese Tatsache liegt darin, dass sich duktiles Material so lange wie möglich wehrt, bis der Bruch eintritt. Wird ein Fachwerk gewählt und dessen Elemente korrekt bemessen, so wird das Tragwerk auf dieses Fachwerk zurückgreifen, falls sich nicht ein effizienteres Tragwerk einstellt. Das Vorgehen ist somit auf der sicheren Seite. Es ist aber zu bemerken, dass das sich einstellende Fachwerk auch teilweise durch den Tragwerksentwurf selbst beeinflusst werden kann, indem der Balken nach dem gewählten Fachwerk konstruiert wird. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Spannungsverhältnisse in der Schubzone einerseits von der Materialart (Stahlbeton, Holz, Stahl usw.) abhängig sind und andererseits durch die konstruktive Ausbildung dieser Zone beeinflusst werden können.

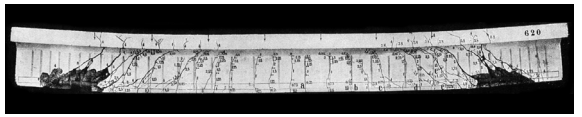


Bild 12.3: Stark beanspruchter Versuchsbalken aus Stahlbeton

Stahlbetonträger

Wenn das Material eines Tragwerks vor allem Druckbeanspruchungen widerstehen kann, zugleich aber seine *Zugfestigkeit begrenzt* ist, ist es notwendig, Verstärkungen einzufügen, um Zugkräfte übertragen zu können. Dies ist zum Beispiel bei Beton der Fall, welcher deshalb *mit Hilfe von Bewehrungen aus Stahl verstärkt* wird, da Stahl ein Material mit hoher Zugfestigkeit ist (vgl. Kapitel 5). Diese Bewehrungen müssen dort angeordnet werden, wo innere Zugkräfte erwartet werden: in der Zugzone und in der Schubzone des Balkens.

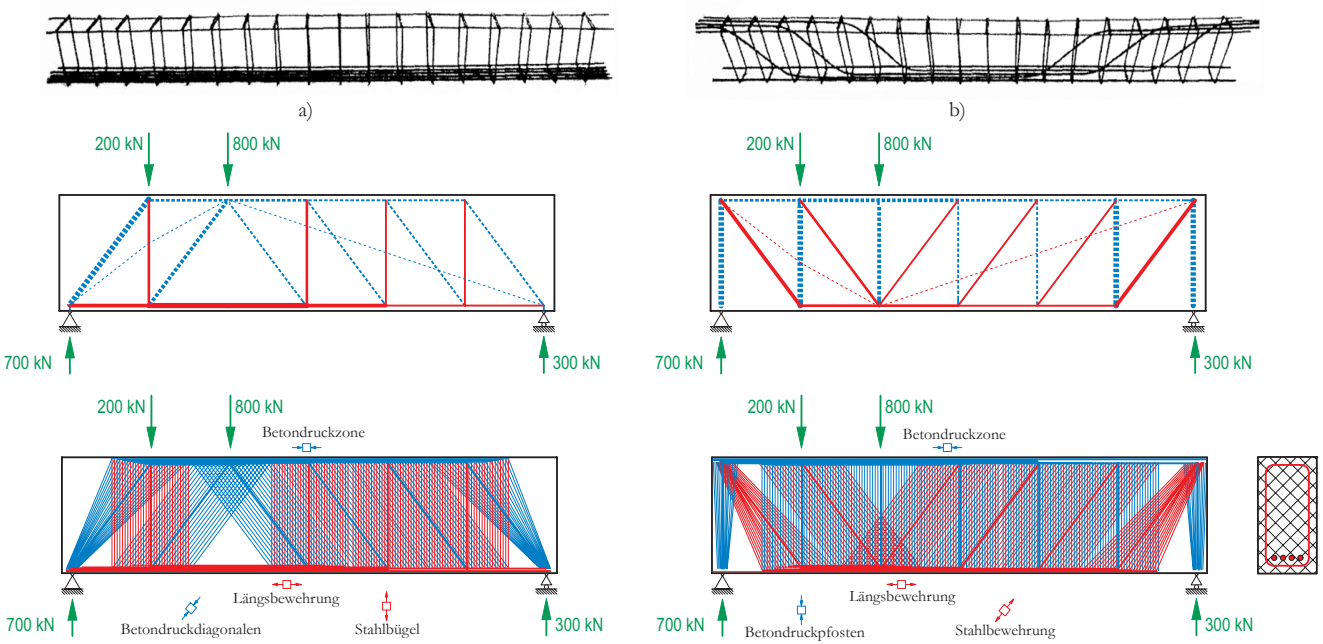


Bild 12.4: Typische Bewehrung von Stahlbetonträgern mit Bügeln (a) und geneigter Hauptbewehruung (b) und zugehörigen inneren Kräften

Beim Spannungsfeld gemäss Bild 12.2 müssten somit in der Schubzone sowohl vertikale Bügel zur Aufnahme der Zugkräfte der Pfosten als auch geneigte Bügel zur Aufnahme der Zugkräfte der Diagonalen angeordnet werden. Obschon dies grundsätzlich möglich wäre, ist es aus konstruktiver Sicht wesentlich zweckmässiger, nur vertikale bzw. nur geneigte Bügel einzusetzen.

Im Bild 12.4a ist eine mögliche Lösung für die Bewehrung eines Balkens mit vertikalen Bügeln schematisch dargestellt. Das Fachwerk wurde so entworfen, dass alle Pfosten durch Zug beansprucht werden und so die Bügel vertikal ausgebildet werden können. Entsprechend ist im Bild 12.4b eine mögliche Lösung für die Bewehrung eines Balkens mit geneigten Bügeln schematisch dargestellt.

Heute werden in der Praxis zumeist Lösungen mit vertikalen Bügeln bevorzugt, weil diese sich auf der Baustelle einfacher verlegen lassen als geneigte. Die Längsbewehrung, welche die Kräfte in der Zugzone des Balkens aufnehmen muss, ist in beiden Fällen gut erkennbar. Sie

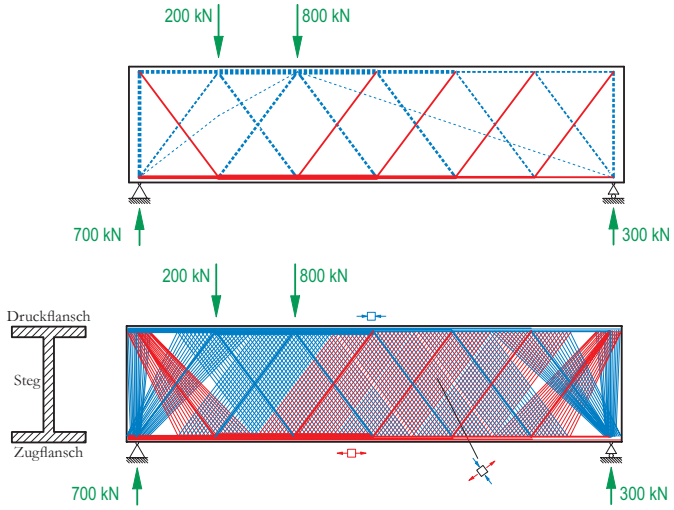


Bild 12.5: Stahlträger mit zugehörigen inneren Kräften

ist in Feldmitte am stärksten, dort wo die innere Zugkraft am grössten ist (Bild 12.4b). Es sind auch so genannte konstruktive Längsbewehrungsstäbe am oberen Rand erkennbar, welche vor allem der Befestigung der restlichen Eisen dienen und eine Verschiebung dieser Eisen während des Betonierens verhindern. In der Druckzone übernimmt der Beton die inneren Kräfte. Wie im Bild 12.4 dargestellt, ist der Beton auch in der Schubzone beansprucht und bildet bei der Lösung mit vertikalen Bügeln die Diagonalen.

Bei dem im Bild 12.3 dargestellten Versuchsbalken mit vertikaler Bewehrung, fotografiert nach dem Eintreten des Bruches, deuten die zahlreichen Risse in der Zugzone an, dass der Beton hier dem Stahl die Aufgabe der Aufnahme der Zugbeanspruchung vollständig übergeben hat. Die obere Druckzone sieht dagegen intakt aus. Der Beton hat in diesem Bereich die Druckkräfte übertragen. In der Schubzone ist der Beton ebenfalls gerissen, und die Richtung der Risse entspricht der Richtung der einachsig beanspruchten Diagonalen, während die vertikal verlaufende Bügelbewehrung die Pfostenkräfte aufnimmt.

Stahlträger

Stahl ist im Gegensatz zum Beton sowohl zug- als auch druckfest. Die diagonalen Fachwerkkräfte in der Schubzone können bei einem Träger aus Stahl am effizientesten mit Hilfe eines *x-förmigen Fachwerks* aufgenommen werden. Die Wahl eines geeigneten Fachwerks zur Ermittlung der inneren Kräfte hängt also entscheidend vom Material des Tragwerks ab.

Bei einem doppel-T-Träger werden die Druck- und die Zugzonen von den so genannten *Flanschen* gebildet, während sich die Schubzone im *Steg* ausbildet. Das entsprechende Fachwerk mit einem zugehörigen Spannungsfeld ist im Bild 12.5 dargestellt. Die beiden Flansche sind einachsig beansprucht, während der Stahl im Steg eine zweiachsige Beanspruchung, mit Zug in die eine Richtung und Druck in die andere Richtung aufweist.

12.2 Einfache Tragwerke unter konzentrierten und verteilten Lasten

Einfacher Balken

Mittels des eingeschriebenen Fachwerks können Überlegungen aus Kapitel 10 sinngemäss auch auf Balken aller Art übertragen werden. Das *Bogen-Seiltragwerk* ist somit auch bei den Balken ein *wichtiges Hilfsinstrument zur Beurteilung des generellen Tragverhaltens*. Wie im Abschnitt 10.1 gezeigt wurde, erfolgen erste Kraftausbreitungen beim Übergang vom Bogen-Seiltragwerk zum Fachwerk, und gemäss Abschnitt 12.1 weitere Kraftausbreitungen beim Übergang vom Fachwerk zum Balken. Das in den Balken eingeschriebene Bogen-Seiltragwerk stellt daher auf eine stark vereinfachte Art die Tragwirkung des Balkens dar.

Im Bild 12.6 sind Bogen-Seiltragwerke für einen Balken unter einer konzentrierten Last in Feldmitte und für einen Balken unter einer gleichmässig verteilten Last dargestellt. Der Fall des Balkens unter einer verteilten Last kann auf denjenigen des Balkens unter einer konzentrierten Einzellast zurückgeführt werden, indem die konzentrierte Last Q als Resultierende der gesamten verteilten Lasten $q \cdot l$ betrachtet wird. Die Pfeilhöhe des Bogens unter der Resultierenden ist hierbei doppelt so gross wie diejenige des parabelförmigen Bogens. Die inneren Kräfte in der Zug- und in der Druckzone können also ermittelt werden, sobald die wirksame Höhe z festgelegt ist. *Diese Höhe ist in erster Linie von der Form des Querschnitts abhängig* (vgl. Kapitel 14). Ein Ver-

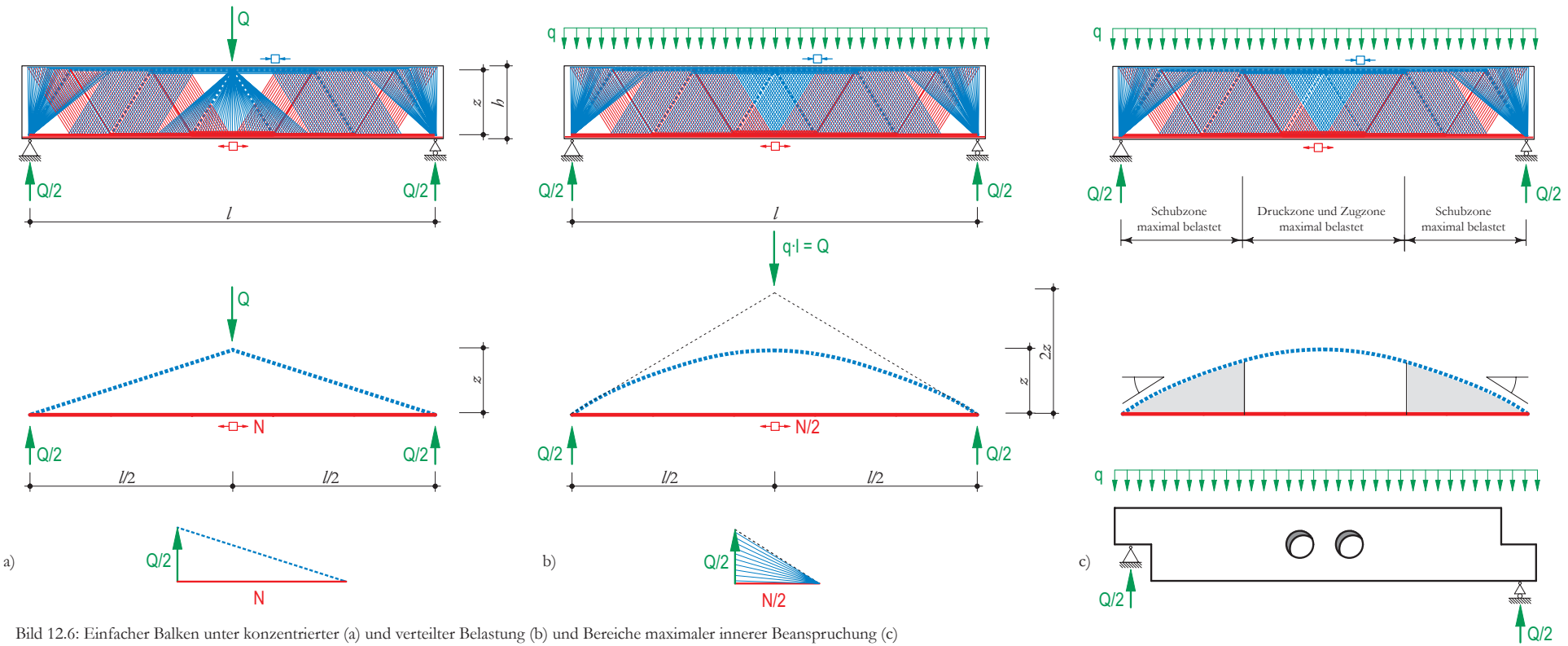


Bild 12.6: Einfacher Balken unter konzentrierter (a) und verteilter Belastung (b) und Bereiche maximaler innerer Beanspruchung (c)

gleich der beiden Kräftedreiecke zeigt, dass die Kräfte in den Gurten halbiert werden, wenn die Last über die gesamte Balkenlänge verteilt wird. Dies erklärt sich dadurch, dass die Last, welche in der Nähe der Auflager angreift, den mittleren Teil des Balkens weniger stark beansprucht.

Wie bei den Fachwerken gibt auch bei den Balken das Bogen-Seiltragwerk Auskunft darüber, wo sich die am stärksten beanspruchten Bereiche befinden: die inneren Kräfte der Druck- und Zugzonen entlang der Gurte sind proportional zum Abstand zwischen dem Druck- und dem Zugelement des Bogen-Seiltragwerks. Die inneren Kräfte in der Schubzone entlang der Diagonalen und Pfosten sind am grössten, wo der eingeschlossene Winkel zwischen der Tangente an die Drucklinie und der Zuglinie des Bogen-Seiltragwerks am grössten ist. Die Bereiche der grössten Beanspruchung für einfache Balken sind in Bild 12.6c dargestellt. Die Kenntnis der am stärksten beanspruchten Bereiche ist beim Tragwerksentwurf sehr hilfreich, denn *Aussparungen oder sonstige Schwächungen sollten in diesen Bereichen vermieden werden*. Aus diesem Grund ist es auch sinnvoll, die am schwächsten beanspruchten Bereiche zu erkennen: eventuelle Aussparungen in diesen Bereichen sind meist belanglos für die Tragwirkung. Im Bild 12.6c sind vorteilhafte Positionen zur Anordnung von Aussparungen und Schwächungen im Fall eines Balkens unter verteilter Belastung angegeben. Es ist allerdings zu bemerken, dass auch in Bereichen kleinerer Beanspruchung ein alternativer Kraftfluss gefunden werden muss, wenn diese durch Aussparungen geschwächt werden.

Konsolen

Auch die Konsolen können verstanden werden, indem ein Fachwerk eingeschrieben und das zugehörige Bogen-Seiltragwerk untersucht wird. Im Bild 12.7 ist eine Konsole aus einem unteren Bogen und einem oberen Zugglied dargestellt. Sowohl unter konzentrierter wie auch unter verteilter Last haben die inneren Kräfte im Zug- und Druckglied des Bogen-Seiltragwerks die gleiche Intensität wie die maximalen Gurtkräfte des Fachwerks und somit auch wie die maximalen inneren Kräfte

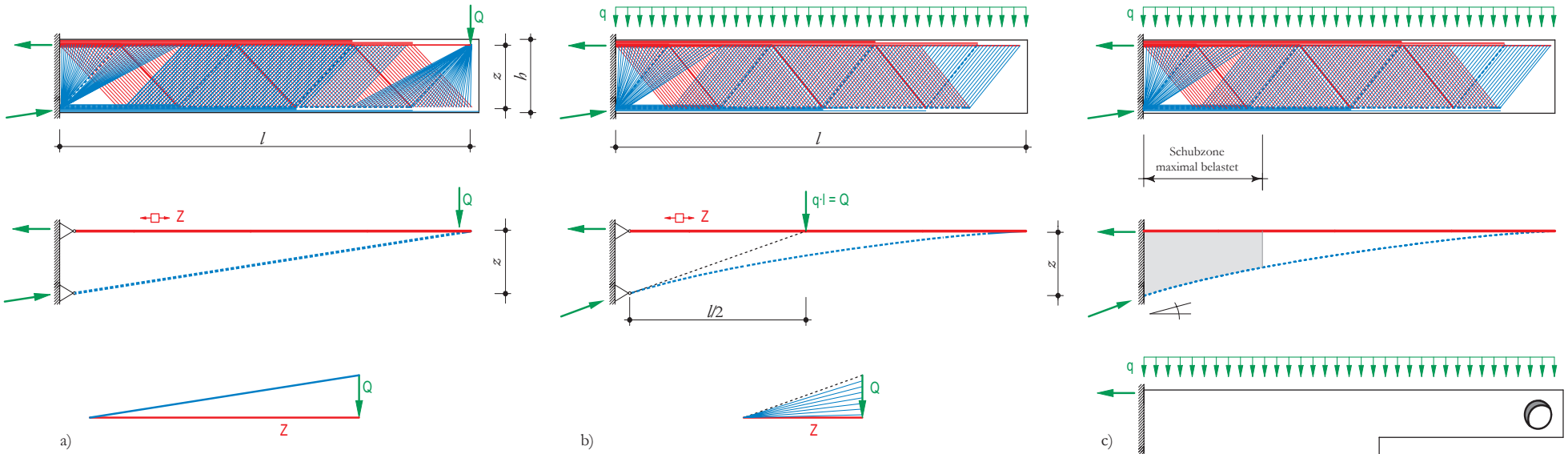


Bild 12.7: Balkenartige Konsole unter konzentrierter (a) und verteilter Belastung (b) und Bereiche maximaler innerer Beanspruchung (c)

in der Druck- und Zugzone der balkenartigen Konsole. Im Bild 12.7c sind die Bereiche grösster Beanspruchung sowie vorteilhafte Positionen zur Anordnung von Aussparungen und Schwächungen angegeben. Konsolen, bei welchen die Querschnittsflächen dem Verlauf der inneren Kräfte folgen, weisen eine Konzentration des Materials vor allem im Einspannbereich auf, während der Querschnitt am Ende dünner werden kann. Ein Beispiel hierfür ist die Form des Baumstamms, dessen Hauptfunktion darin besteht, die horizontalen Windkräfte aufzunehmen und in den Grund abzuleiten. Ähnliches gilt für sehr hohe Gebäude, die ebenfalls stark durch Windkräfte belastet sind. Deshalb weisen Gebäude wie der Canadian National Tower in Toronto oft eine Variation der Querschnitte auf, die dem Querschnittsverlauf von Bäumen ähnlich ist (Bild 12.8).

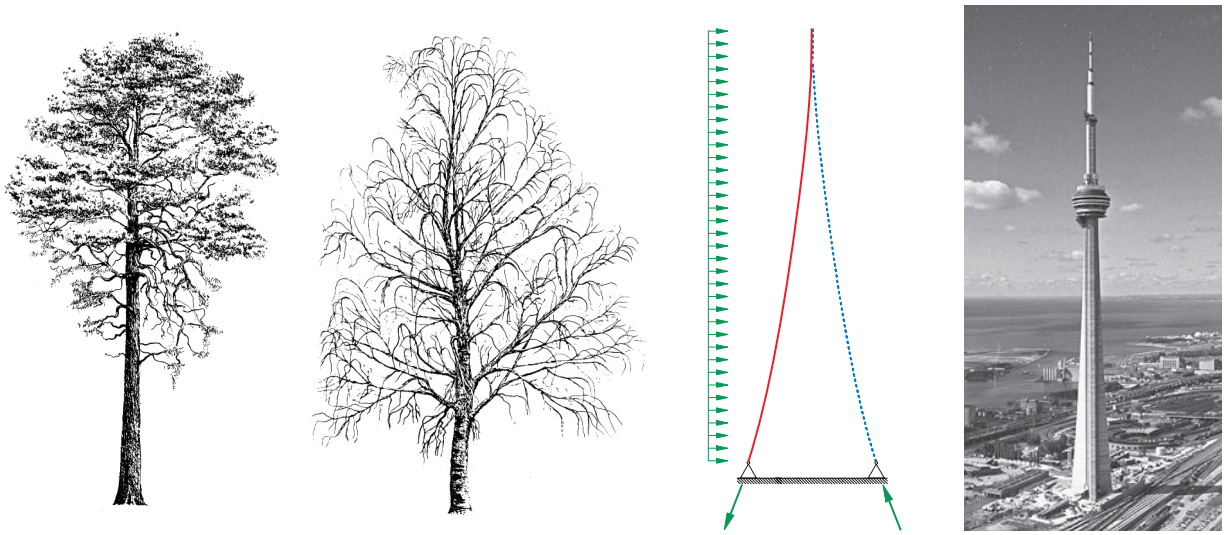


Bild 12.8: Form der Baumstämme; Canadian National Tower, Toronto, 1973-76, Arch.: John Andrews & Webb Zerafa Menkes Housden Partnership, Ing.: Nicolet, Dressel and Associates & Bruno Thürlimann (h = 553 m)

12.3 Zusammengesetzte Tragwerke

Balken mit Auskragungen

Wie im Fall der Fachwerke führt die einseitige oder zweiseitige Ergänzung eines Balkens mit Konsolen zu einer Reduktion der Gurtkräfte, also der inneren Kräfte in der Druck- und Zugzone. Bei gleichmässig über die gesamte Länge des Balkens verteilten Lasten werden die Beanspruchungen im Feld umso kleiner und zugleich die Beanspruchungen über den Auflagern umso grösser, je länger die Konsolen sind (vgl. Bild 8.25).

Beim Tragwerksentwurf ist es zweckmässig die Formgebung eines Balkens so zu wählen, dass *mehr Material dort angeordnet wird, wo die inneren Kräfte am grössten* sind. Zur Beurteilung dieses Sachverhaltes eignet sich das eingeschriebene Bogen-Seiltragwerk besonders gut. Beim Entwurf für ein Terminal für den Flughafen in Rom wurde dieser Grundsatz befolgt (Bild 12.9). Das Dach des Terminals liegt an zwei Punkten auf, und über diesen Auflagern sind das Druck- und das Zugelement des Bogen-Seiltragwerks am weitesten voneinander entfernt. Die inneren Kräfte sind deshalb an dieser Stelle maximal und somit auch der Materialbedarf. Der Dachträger wurde daher über den Auflagerpunkten am höchsten ausgebildet.

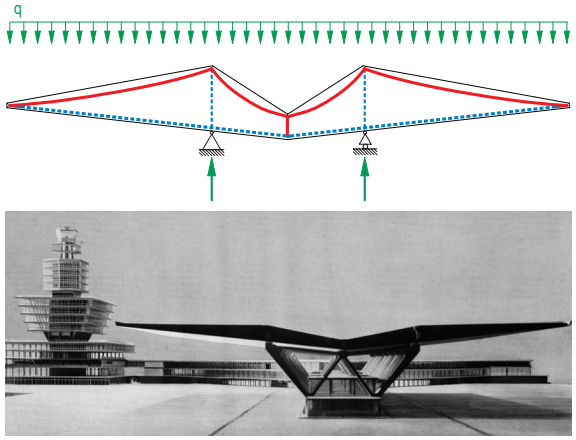


Bild 12.9: Projekt, Terminal Flughafen Rom, 1957, Arch. & Ing.: Pier Luigi Nervi

Gerberträger

Genau wie bei den Bogen-Seiltragwerken (Abschnitt 8.5) und bei den Fachwerken (Abschnitt 10.8) können einfache Balken und Balken mit Konsolen so zusammengesetzt werden, dass ein so genannter Gerberträger entsteht, ein *statisch bestimmtes Tragwerk*, welches über mehrere Felder verläuft.

Die auf die eingehängten kurzen Balken wirkenden Lasten werden bei diesem Tragwerk auf die langen Balken übertragen, welche als Balken mit Auskragungen die Lasten zu den Auflagern leiten (Bild 12.12). Sollen in einem Gerberträger unter gleichmässig verteilten Lasten die inneren Gurtkräfte in Feldmitte der kurzen Balken die gleiche Intensität haben wie die inneren Kräfte in den langen Balken über den Auflagern, dann muss das Verhältnis $l' / l = 0.15$ gewählt werden.

Im Bild 12.11 sind die Bereiche grösster Beanspruchung für den mittleren Bereich der Balken mit Auskragungen dargestellt, sowie vorteilhafte Positionen zur Anordnung von Aussparungen und Schwächungen. Für die Bereiche der eingehängten Balken und der Auskragungen gelten die Überlegungen gemäss Bild 12.6.



Bild 12.10: Polcevera-Viaduct, Genua, 1962-68, Arch. & Ing.: Riccardo Morandi

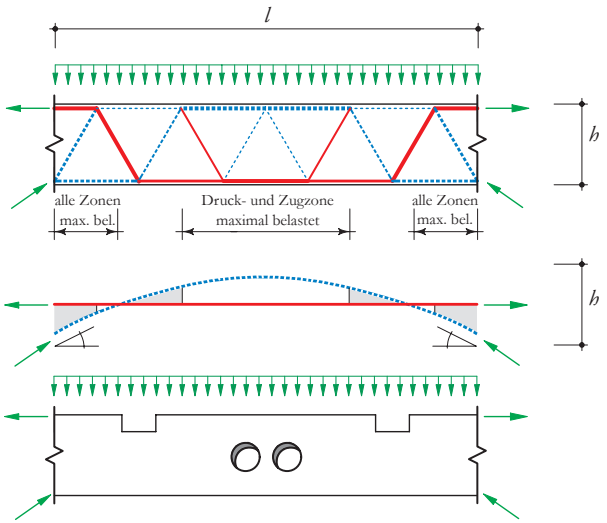


Bild 12.11: Bereiche maximaler Beanspruchung bei einem Gerberträger bzw. Durchlaufträger und Anordnung von Aussparungen

Auch bei Gerberträgern kann die Höhe der Balken so gewählt werden, dass sich diese dem Verlauf der inneren Kräfte anpasst. Bei dem im Bild 12.10 dargestellten Polcevera-Viadukt in Genua erreichen die auf die Konsolen aufgelegten kurzen Balken ihre grösste Höhe in Feldmitte. Theoretisch befinden sich bei Gerberträgern unter verteilten Lasten die Orte der minimalen Beanspruchung der langen Träger dort, wo die Druckbogen des Bogen-Seiltragwerkes die Zugglieder schneiden.

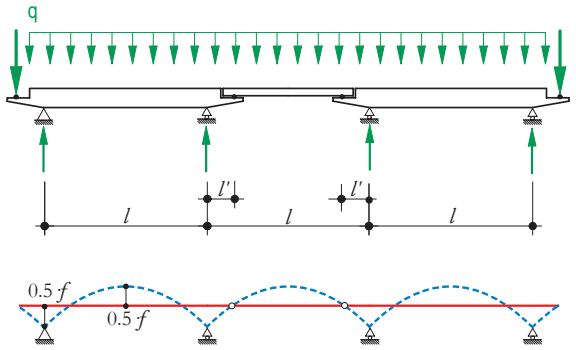


Bild 12.12: Gerberträger

Auch in diesem Fall, genau wie bei den bereits behandelten Seitenfeldern der Mainbrücke von Heinrich Gerber (siehe Bild 8.29), muss in diesen Bereichen eine genügende Höhe gewählt werden, damit das Gleichgewicht unter veränderlichen Lasten gewährleistet bleibt.

Durchlaufträger

Wenn beim Gerberträger die Gelenke blockiert werden, d.h. wenn ein langer Balken über mehrere Auflager verläuft, entsteht ein äusserlich *statisch unbestimmtes Tragwerk* mit einer Tragwirkung, die qualitativ ähnlich zur Tragwirkung eines Gerberträgers ist. Das zugehörige Bogen-Seiltragwerk hat eine undefinierte Lage weil die Kreuzungspunkte der Zug- und Druckelemente, welche beim Gerberträger stets in den Gelenken liegen müssen, unbekannt geworden sind. In dieser Situation ist

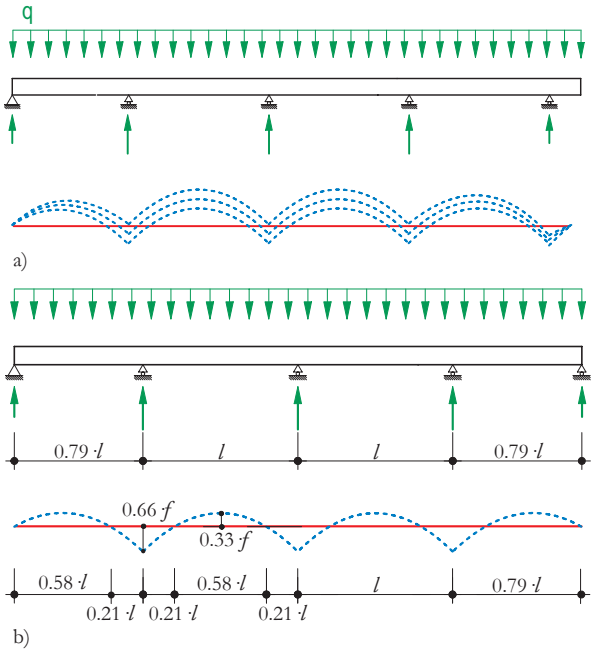


Bild 12.13: mögliche Bogen-Seiltragwerke eines Durchlaufträgers (a) und reales Bogen-Seiltragwerk unter gleichmässig verteilter Last (b)

es in der Tat möglich, unendlich viele verschiedene Bogen-Seiltragwerke so anzuordnen, dass alle im Gleichgewicht mit den äusseren Lasten sind (Bild 12.13a).

In Wirklichkeit passt zu jedem Beanspruchungszustand ein genau definiertes Bogen-Seiltragwerk. Dieses hängt jedoch nicht nur von den äusseren Lasten ab, sondern auch von den mechanischen Eigenschaften des Materials, vom Steifigkeitsverlauf über die Länge des Tragwerks und von einer ganzen Serie weiterer Effekte wie zum Beispiel Temperaturveränderungen, Auflagerverschiebungen (z.B. durch Setzungen) und so weiter.

Unter der Annahme, dass ausser den äusseren Lasten keine weitere Belastung vorhanden ist, dass sich das Material linear-elastisch verhält und dass der Querschnitt einschliesslich seiner Steifigkeit über die gesamte Länge des Balkens konstant ist, hat das zugehörige Bogen-Seiltragwerk eines durchlaufenden Balkens mit regelmässigen Spannweiten unter gleichmässig verteilter Belastung, einen Abstand zwischen dem Bogen und dem Zugglied von 1/3 der gesamten Pfeilhöhe in Feldmitte und von 2/3 über den Auflagern (Bild 12.13b). Mit anderen Worten weisen die inneren Kräfte in der Druck- und in der Zugzone über den Auflagern die doppelten Werte auf wie diejenigen in Feldmitte.

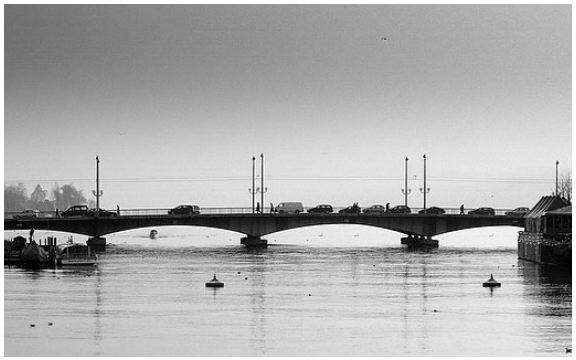


Bild 12.14: Quaibrücke, Zürich, 1882-84, Arch. & Ing.: Arnold Bürkli (alte Brückenelemente 1984 ersetzt und verbreitert)

Wie im Bild 12.13b deutlich wird, sind die *Randfelder des Durchlaufträgers gegenüber den Mittelfeldern verkürzt*. Wären alle Felder gleich lang, so würden die Randfelder eine grössere Beanspruchung erfahren, da der Bogen des Bogen-Seiltragwerks das Zugglied erst bei den Randauflagern treffen würde. Die Feldmitte in den Randfeldern würde dann einen grösseren Abstand zum Zugglied aufweisen wie in den Mittelfeldern und damit stärker beansprucht. Dieser Effekt wird häufig durch Reduktion der Randspannweiten eliminiert. Wenn die Randspannweiten 79% der Mittelspannweiten betragen, sind die maximalen inneren Kräfte in den Druck- und Zugzonen in allen Feldern gleich.

Auch wenn weitere Einflüsse berücksichtigt werden, bleiben die Beanspruchungen über den Auflagern generell grösser als in den Feldern. Ein Durchlaufträger mit an die Beanspruchungen angepassten Querschnitten weist somit grössere Querschnittshöhen über den Auflagern als in den Feldern auf. Dies wird an der Quaibrücke in Zürich gut sichtbar (Bild 12.14).

12.4 Rahmen

Dreigelenkrahmen

Genau wie die Bögen sind auch Rahmen mit drei Gelenken statisch bestimmt, weil die Drucklinie durch die drei Gelenke verlaufen muss und die Pfeilhöhe des Bogen-Seiltragwerks somit eindeutig definiert ist. Das Bogen-Seiltragwerk wird in diesem Fall qualitativ nur durch die äusseren Lasten beeinflusst und nicht wie ein Durchlaufträger durch Effekte wie Temperaturunterschiede oder Auflagerverschiebungen.

Die Brücke bei Pinzano ist ein Beispiel für ein entsprechendes Tragwerk aus Spannbeton (Bild 12.15). Die Druckbeanspruchungen werden mit den Betonele-

menten aufgenommen, während für die Aufnahme der Zugbeanspruchungen *Spannkabel mit sehr hoher Zugfestigkeit* erforderlich sind. Wie im Bild 12.15 ersichtlich, entspricht die Anordnung der Spannkabel an der äusseren Seite der Stützen und auf der oberen Seite des Balkens genau dem Verlauf der Zugkräfte. Das dargestellte Tragwerk mit Druck- und Zugelementen ist ein Bogen-Seiltagwerk, welches die Tragwirkung vereinfachend beschreibt. Die tatsächliche Tragwirkung wird besser mit Hilfe eines Fachwerks beschrieben: die zusätzlichen vertikalen Spannkabel in den Stegen des Balkens entsprechen den auf Zug beanspruchten Pfosten des Fachwerks. Der Obergurt ist in diesem Fall auf Zug beansprucht und der Untergurt auf Druck. Im ausgeführten Querschnitt sind die Gurte in der Fahrbahnplatte und in der unteren Platte des Brückenkastens angeordnet. Im Gegensatz zum Bogen-Seiltragwerk variieren die Kräfte in den Fachwerkgurten merklich entlang ihrer Länge. Dies ist bei der Brücke gut sichtbar, denn die Spannkabel in der Fahrbahn sind vor allem im Einspannbereich konzentriert. Die Dicke der unteren Betonplatte vergrössert sich aus diesem Grund von einigen Zentimetern in der Nähe des mittleren Gelenkes bis zu 100 cm bei der Einspannung, denn an dieser Stelle ist die innere Druckbeanspruchung grösser.

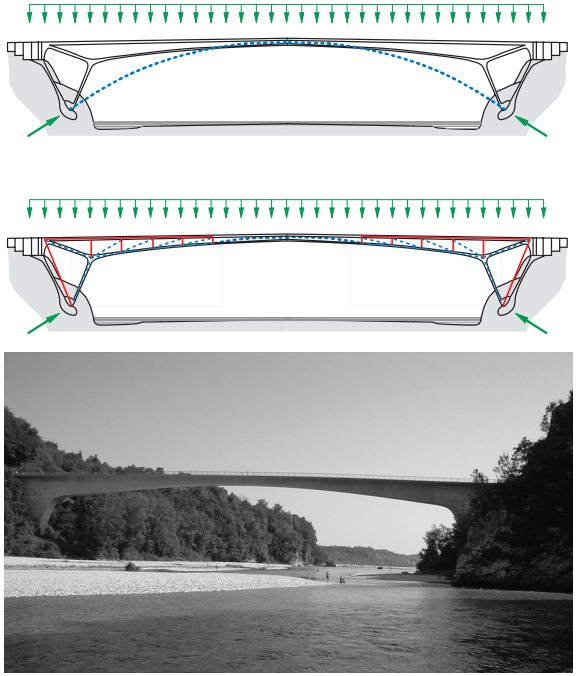


Bild 12.15: Brücke über den Tagliamento, Pinzano, 1967-69, Arch. & Ing.: Silvano Zorzi

Zweigelenkrahmen

Bei der Brücke über die Marne in Luzancy besteht das Tragwerk dagegen aus einem Rahmen mit zwei Gelenken (Bild 12.16). Dieses Rahmentragwerk ist daher genau wie die Bogentragwerke mit zwei Gelenken einfach statisch unbestimmt. Die Drucklinie muss durch die beiden Gelenke am unteren Rand des Tragwerks verlaufen, die Pfeilhöhe der Drucklinie ist aber unbekannt. Im Bild 12.16 ist eine mögliche Drucklinie unter ständigen Lasten dargestellt. Bei einer Erhöhung der Temperatur neigt diese dazu, sich zu senken, während sie sich anhebt, wenn die Temperatur abnimmt oder wenn der Untergrund leicht nachgibt und die Stützenfundamente sich dabei nach aussen verschieben.

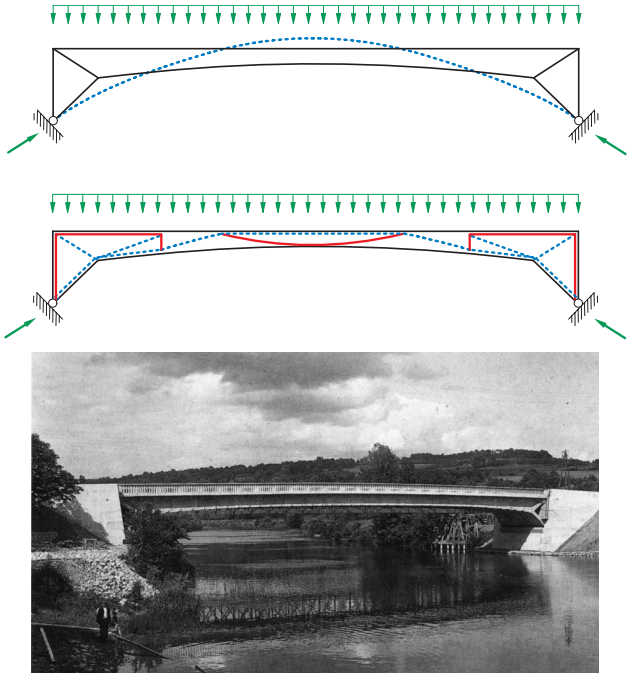


Bild 12.16: Brücke über die Marne, Luzancy, 1946, Arch. & Ing.: Eugene Freyssinet

Wie in Abschnitt 10.8 gezeigt, kann auch bei diesen Tragwerken ein aus Zug- und Druckstreben bestehendes Tragwerk in das Bauwerk eingepasst werden. Verläuft die Drucklinie innerhalb des Materials, so sind nur innere Druckkräfte vorhanden. Verläuft die Drucklinie dagegen ausserhalb des Materials, so entsteht ein auf Druck beanspruchter Bereich entlang des näher an der Drucklinie gelegenen Randes und ein auf Zug beanspruchter Bereich auf der gegenüberliegenden Seite.

Im Beispiel der Brücke sind die Stützen daher so gestaltet, dass nur dort Material vorhanden ist, wo es benötigt wird, also entlang der äusseren Zugbänder und den inneren auf Druck beanspruchten Tragelementen. Das Tragverhalten im Bereich der so genannten Rahmenecke, das heisst dem Verbindungsbereich zwischen Balken und Stützen, ist somit identisch mit dem im Bild 10.35b beschriebenen Prinzip der Umlenkung.

Form und innere Kräfte

Beide Brücken sind gute Beispiele für eine *durch den Kräftefluss bestimmte Formgebung*. Ein weiteres Beispiel hierfür ist der von Marcel Breuer and Bernard Zehrfuss entworfene Sitz der UNESCO in Paris. Das Zusammenspiel von Form und Kraft wird gut sichtbar in den Rahmen des Erdgeschosses, deren Gestalt geformt ist durch die Aufnahme sowohl der ständigen Lasten als auch der horizontalen Einwirkungen (Bild 12.18). Die

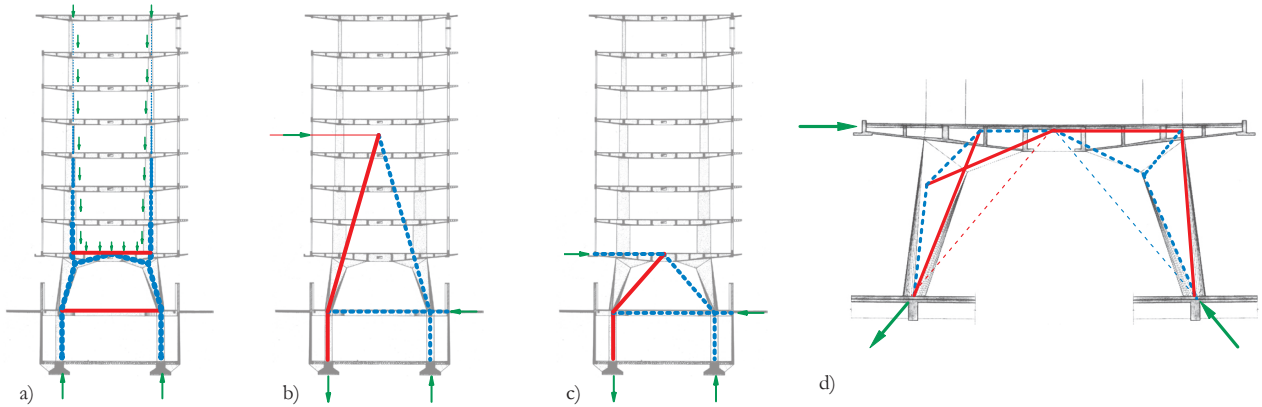


Bild 12.17: Innere Kräfte im Tragwerk bei ständigen Lasten (a) und horizontalen Einwirkungen im Schwerpunkt (b) oder horizontalen Einwirkungen unterhalb des Schwerpunkts (c) sowie deren Umlenkung innerhalb des Rahmens (d)



Bild 12.18: Hauptsitz, UNESCO, Paris, 1952-57, Arch.: Marcel Breuer und Bernhard Zehrfuss, Ing.: Pier Luigi Nervi

Tragwirkung ist ähnlich wie diejenige des Eiffelturms (vgl. Bild 8.21), denn die Neigung der Stützen ist so gewählt, dass eine ideale Aufnahme der horizontalen Beanspruchungen infolge Wind- oder Erdbebeneinwirkungen gewährleistet ist. Wirkt die Resultierende der horizontalen Einwirkungen ungefähr im Schwerpunkt des Gebäudes, so entstehen innere Druck- und Zugkräfte (Bild 12.17b), welche den Druckbeanspruchungen unter ständigen Lasten überlagert sind (Bild 12.17a). Die Drucklinien verlaufen dabei vollständig im Innern der Stützenquerschnitte. Trotz seiner Rahmenform kann das Tragwerk daher vom rein strukturellen Standpunkt aus betrachtet als ein Bogen angesehen werden. Greifen die horizontalen Einwirkungen dagegen, wie im Bild 12.17c gezeigt, an einem tiefer gelegenen Punkt an, dann liegt eine echte Rahmentragwirkung vor (vgl. Bild 10.35) und die resultierenden inneren Zugkräfte im Rahmen müssen durch eine Bewehrung aufgenommen werden. Die Abmessungen der Rahmenquerschnitte im Erdgeschoss variieren also um sich möglichst gut den inneren Kräften anzupassen.

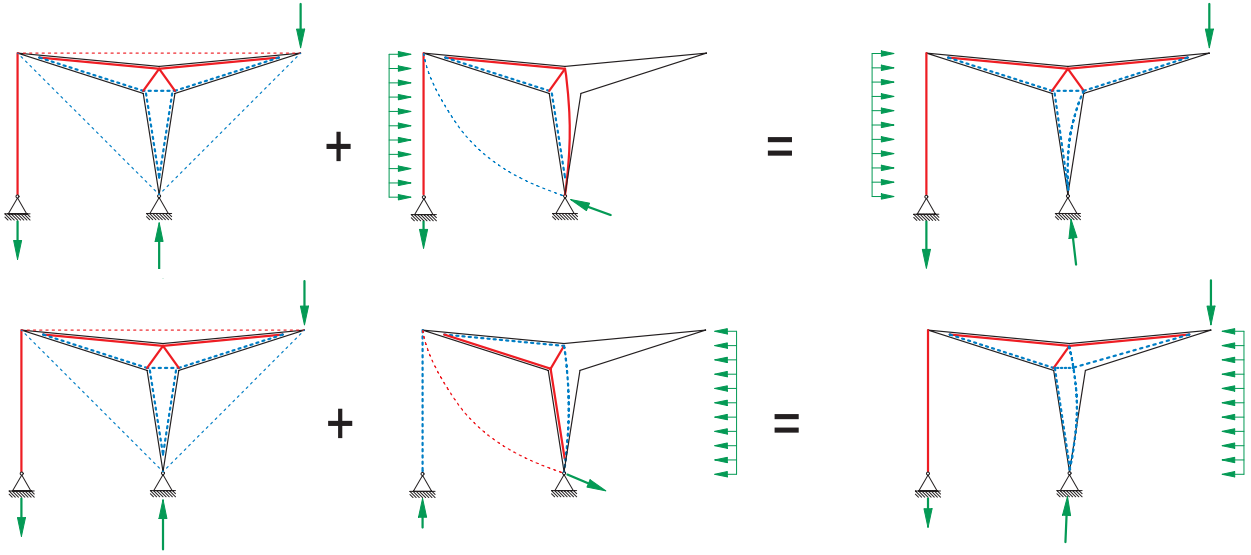


Bild 12.19: Tragwirkung des Rahmens und Zugseils

Eine optimale Anpassung der Rahmenform an den Verlauf der inneren Kräfte zeigt sich auch im Tragwerk des Getränkeausschanks der Quelle Cachat in Evian (Bild 12.20). Eine solche Art *asymmetrischer Rahmen* mit drei

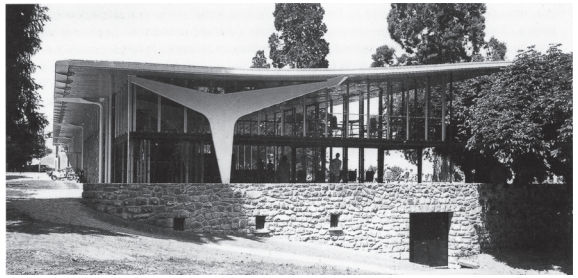


Bild 12.20: Trinkhalle der Quelle Cachat, Evian-les-Bains, 1956-58, Arch.: Maurice Novarina, Ing.: Jean Prouvé

Gelenken stellt eine interessante und elegante Alternative dar, wenn das Tragwerk nicht im Erdreich eingespannt werden kann und zudem die typischen diagonal verlaufenden fachwerkartigen Windverbände vermieden werden sollen. Das in seinen Dimensionen stark reduzierte Rahmenelement zwischen dem Gelenk beim Fundament und dem Scheitelgelenk wird in allen Lastfällen nur mit einer zentrischen Zug- oder Druckkraft beansprucht (Bild 12.19). In allen anderen Elementen des Rahmens treten dagegen grosse Abweichungen von der Wirkungslinie der inneren Resultierenden auf, und dieser Zustand wird durch die grosszügigen Abmessungen veranschaulicht.

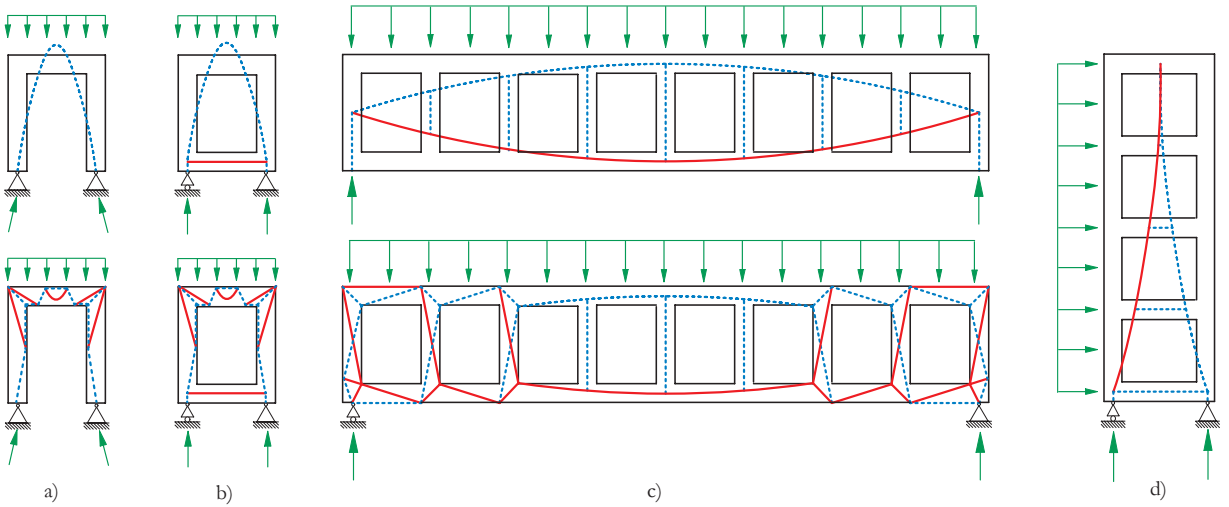


Bild 12.22: Drucklinie und innere Kräfte in einem Rahmen (a), einem geschlossenen Rahmen (b) und einem als Balken belasteten (c) und einem als Konsole belastetem Vierendeel-Träger (d)

Zusammengesetzte Rahmen

Rahmen können auch in horizontaler Richtung *über mehrere Felder kombiniert* werden wie etwa im Konferenzsaal des UNESCO-Komplexes (Bild 12.21). Die Form des Rahmens wurde dabei durch den Verlauf der Drucklinie beeinflusst. Die Rahmen weisen in den Ecken den grössten Abstand von der Drucklinie auf, d.h. die Umlenkkräfte sind in diesen Bereichen maximal. Um einen grösseren Abstand zwischen den auf Druck und den auf Zug beanspruchten Zonen zu erreichen, wurden aus diesem Grund sowohl die Stützen wie auch die Balken als gefaltete Flächen ausgebildet und diese Faltungen geometrisch so gewählt, dass eine gute Abstimmung zwischen Form und inneren Kräften resultiert.

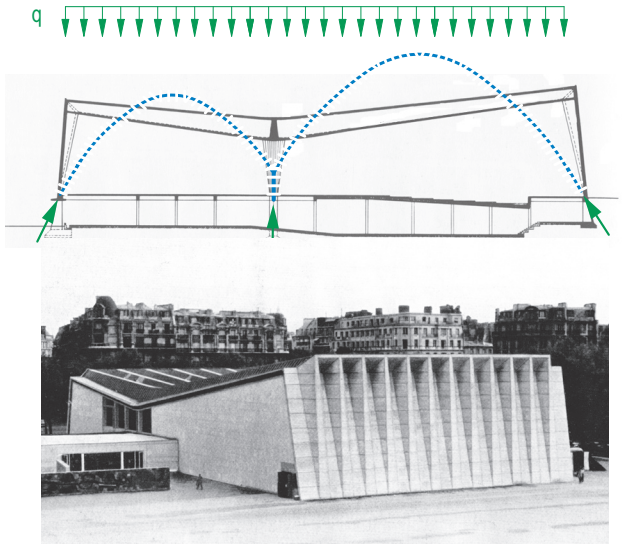


Bild 12.21: Konferenzsaal, UNESCO, Paris, 1952-57, Arch.: Marcel Breuer und Bernhard Zehrfuss, Ing.: Pier Luigi Nervi

Bei Rahmen treten in der Regel auch horizontale Auflagerkräfte auf, da die Drucklinie eines Rahmens unter verteilter Last durch einen Bogen beschrieben werden kann (Bild 12.22a). Bei einem *geschlossenen Rahmen* können diese horizontalen Kräfte im Auflager vermieden werden (Bild 12.22b). Auch geschlossene Rahmen können, ähnlich wie die Rahmen selbst, in horizontaler Richtung in Serie verknüpft werden. Das sich dabei ergebende zusammengesetzte Tragwerk bildet einen so genannten *Vierendeel-Träger* und kann wie ein horizontaler Balken zur Abtragung von vertikalen Lasten eingesetzt werden (Bild 12.22c). Dieses nach dem belgischen Ingenieur Arthur Vierendeel (1852-1940) bezeichnete System wurde von ihm gegen Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt und kann auch als ein N-Fachwerk ohne Diagonalen betrachtet werden.

Wie im Bild 12.22c ersichtlich, verlassen auch hier die Druck- und die Zugelemente des Bogen-Seiltragwerks in wesentlichen Bereichen des Tragwerks das Material



Bild 12.23: Bürohaus La Ferriera, Locarno, 2000-03, Arch.: Livio Vacchini, Ing.: Andreotti + Partners

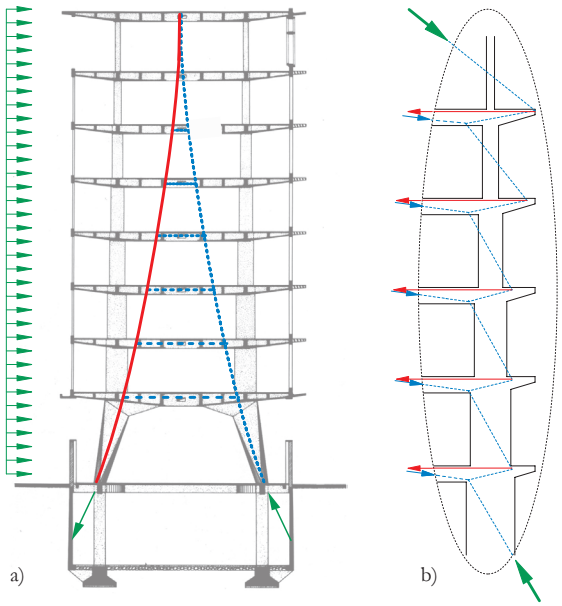


Bild 12.24: Tragwerk als Vierendeel-Träger (a) und innere Kräfte in der Stützenachse unter Windlast und Eigenlast (b)

und müssen mit Hilfe von Zug- und Druckstreben ins Material zurück verschoben werden. Genau wie bei den Rahmen ist es auch bei diesen Tragwerken sehr wichtig, dass die *Pfosten steif mit den Gurten verbunden* werden und nicht wie bei den Fachwerken gelenkig. Durch die steife Verbindung können die inneren Kräfte umgeleitet werden. In Bezug auf die Achse der Tragwerkselemente verlaufen die Druckkräfte im Obergurt und die Zugkräfte im Untergurt des als einfacher Balken gelagerten Vierendeel-Tragwerks daher geneigt. Die in den Pfosten vorhandenen Kräfte lenken die Druckkräfte in den Gurten auf analoge Art und Weise um, wie bei den Stützen von übereinander liegenden Rahmen. Trotz ihrer geringeren statischen Effizienz werden Vierendeel-Träger, im Gegensatz zu den Fachwerken, in der zeitgenössischen Architektur oft benutzt, weil die rechteckigen Öffnungen zwischen den Gurten und den Pfosten sich gut an die Anordnung von Türen und Fenstern anpassen lassen. Um die Effizienz zu erhöhen, können Vierendeel-Träger auch übereinander angeordnet werden. Ein Beispiel hierfür ist das Bürohaus La Ferriera von Livio Vacchini (Bild 12.23), bei welchem die aussen liegende tragende Fassade nur auf wenigen massiven Stützen aufliegt, so dass ein von Randstützen befreites Erdgeschoss realisiert werden konnte. Obwohl die Lasten und Dimensionen beträchtlich sind, können die inneren Kräfte in Grenzen gehalten werden, einerseits dank der Verteilung der Belastungen auf mehrere Stockwerke, und andererseits dank der bedeutenden wirksamen Höhe.

Vierendeel-Träger werden in der Architektur häufig zur Abtragung horizontaler Wind- und Erdbebenlasten in mehrstöckigen Gebäuden verwendet. Die Serie von gestapelten Rahmen wird dabei nicht wie ein Balken belastet, sondern wie eine Konsole (Bild 12.22d). Der in Bild 12.24a dargestellte Hauptsitz der UNESCO in Paris ist dafür ein gutes Beispiel. Wie am Schnitt ersichtlich, sind die Stützen im Erdgeschoss so geformt, dass die inneren Kräfte innerhalb des Materials verlaufen (vgl. Bild 12.17b).

Das Tragwerk kann aber nicht nur als Vierendeel-Träger verstanden werden, sondern auch als zwei hohe, durch eine Serie von Balken verbundene Stützen, die durch Kräfte beansprucht werden, welche an den Rändern der Verbindungsbalken angreifen. In der Tat erlauben die Balken mit ihren inneren Zug- und Druckkräften den Abstand der Druck- und Zugelemente des Bogen-Seiltragwerks von der Stützenachse zu verringern, und so die Effizienz der Stützen deutlich zu erhöhen (Bild 12.24b).

12.5 Scheiben

Bei der Herleitung der Tragwirkung von Fachwerken wurde ein einfaches Bogen-Seiltragwerk sukzessive durch weitere Bogen-Seiltragwerke überlagert (vgl. Abschnitt 10.1). Diese Überlagerung war notwendig, um die virtuellen Auflagerkräfte der Bogen-Seiltragwerke schrittweise in horizontaler Richtung zu verschieben. Balken und Fachwerke sind daher Tragwerke mit geringer Pfeilhöhe und grosser Spannweite, deren Tragwirkung auf dieser Überlagerung beruht.

Ist das Verhältnis der Spannweite zur Pfeilhöhe kleiner als ca. 3:1, so ist eine solche Überlagerung von Bogen-Seiltragwerken nicht nötig, d.h. die Tragwirkung eines solchen Tragwerks entspricht tatsächlich dem eines einfachen Bogen-Seiltragwerks, da sich im Inneren der Scheibe keine eigentlichen Druck- und Zugdiagonalen bilden, wie etwa beim Fachwerk des Balkens (Bild 12.25). Balken, die im Vergleich zu ihrer Spannweite hoch sind, werden daher als *Scheiben* oder *Wandscheiben* bezeichnet. Über ein oder sogar mehrere Stockwerke

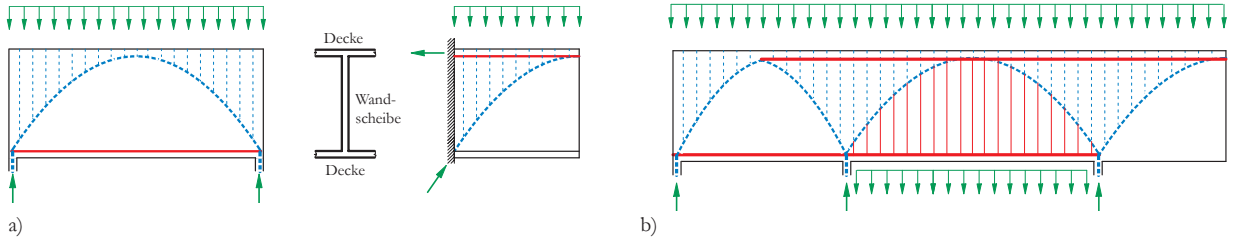


Bild 12.25: Innere Kräfte in einfachen (a) und zusammengesetzten Wandscheiben (b)

verlaufende Elemente eignen sich besonders gut, um Kräfte als Scheiben abzutragen. Exemplarisch wird dies am Wohnhaus Forsterstrasse in Zürich von Christian Kerez deutlich (Bild 12.26). Durch eine komplexe, dreidimensionale Komposition von vorgespannten Flachdecken und punktgelagerten Wandscheiben entsteht ein räumliches Tragwerk im Einklang mit der architektonischen Idee, welches die Kräfte schrittweise in die Aussenwände des Untergeschosses leitet und hierdurch eine stützenfreie Parkgarage ermöglicht.

Im Wohnhaus Forsterstrasse sind alle Wandscheiben als geschlossene Scheiben ausgeführt. In der architektonischen Anwendung werden Wände aber häufig mit Aussparungen für Türen, Fenster oder technische In-

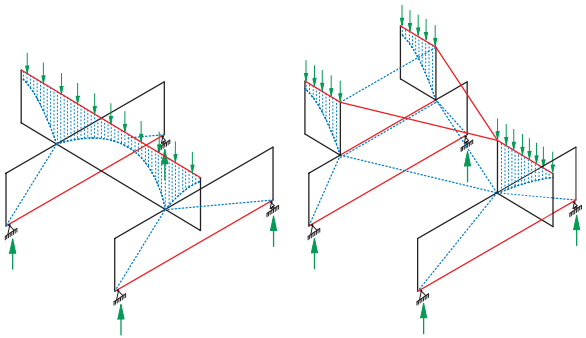




Bild 12.26: Mehrfamilienhaus Forsterstrasse, Zürich, 2002-03, Arch.: Christian Kerez, Ing.: Joseph Schwartz

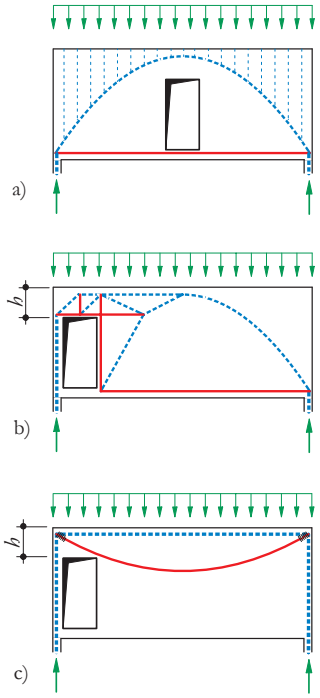


Bild 12.27: Vorteilhafte Lage von Aussparungen (a) und unvorteilhafte Lage von Aussparungen mit Türsturz als Konsole (b) respektive Einbau von Zugseilen (c)

stallationen versehen. Das zugehörige Bogen-Seiltragwerk gibt Auskunft darüber, in welchen Bereichen eine vorteilhafte Lage für die Platzierung von Aussparungen ist (Bild 12.27a).

Wird dagegen der Verlauf der inneren Kräfte durch Aussparungen gestört, so muss ein alternativer Kräfteverlauf gefunden werden, was häufig zu Zusatzaufwand führt und zu einer wesentlich weniger effizienten Tragwirkung führen kann (Bild 12.27b und Bild 12.27c). Jede Aussparung hat zudem Auswirkungen auf die Dimension der Wandscheibe. Wird etwa der Türsturz als Konsole aktiviert, so ist darauf zu achten, dass eine genügende Sturzhöhe h vorhanden sein muss.

13 Räumliche Balken

Die Verwendung von Balken als Tragelement, insbesondere bei der Ausbildung von Überdachungen, ist eines der grundlegenden Mittel der Raumbildung. Als räumliche Balken sollen daher im Folgenden Tragwerke verstanden werden, die aus räumlich angeordneten Balken oder Scheiben zusammengesetzt sind.

13.1 Nebeneinander angeordnete Balken

Die einfachste Art, ein ebenes Tragwerk wie zum Beispiel eine Decke zu erzeugen, besteht darin, eine Serie von Balken parallel in einem diskreten Abstand zueinander anzuordnen, und auf diesen Balken Sekundärelemente zu legen, welche die äusseren Lasten aufnehmen können und auf die Balken verteilen (Bild 13.1a).

Dies ist das *Tragwerksprinzip von klassischen Holzdecken* bestehend aus Balken als primäre und Brettern als sekundäre Tragelemente. In Stahl ausgeführt zeigt sich diese Bauweise deutlich in der Solaranlage in Barcelona (Bild 13.2). Zudem wird dieses Tragwerksprinzip häufig ausgeführt als Verbundtragwerk aus Beton und Tonziegel, bekannt auch als Hourdis-Decke, oder auch als Verbundtragwerk aus Beton und Stahl. Als Stahlträger werden dabei zumeist Doppel-T-Träger verwendet, auf welche eine Stahlbetondecke aufgelegt wird.

Eine Alternative zu diesem Balkentragwerk besteht darin, die Balken direkt nebeneinander zu legen, so dass das Sekundärtragwerk überflüssig wird (Bild 13.1b). In diesem Fall ist es zweckmässig, den Querschnitt der Balken möglichst breit zu wählen, um hierdurch die Anzahl der Balken zu beschränken. Besonders effizient sind die Balken mit T-Querschnitt, weil dabei der möglichst breite Flansch eine doppelte Funktion ausübt: einerseits nimmt dieser die Lasten auf, welche den Balken in Querrichtung wie eine Konsole beanspruchen, und andererseits wirkt der Flansch in Längsrichtung als Bestandteil der Druckzone des Balkens. In der Ford Motor Company Plant von Albert Kahn wurden diese in Stahlbeton ausgeführten Plattenbalken mit der tragenden Skelettkonstruktion verbunden (Bild 13.3). Diese monolithisch ausgeführte Bauweise lehnt sich stark an die in Holz oder Stahl ausgeführten diskreten Tragwerke an und wird als *Système Hennebique* bezeichnet. Sie geht zurück auf den Ingenieur François Hennebique (1842-1921). Diese Bauweise ermöglicht grosse Spannweiten und eine Flexibilität in der Raumaufteilung sowie eine weitgehende Befreiung der Fassade von tragenden Elementen. Das Système Hennebique war grundlegend für das grossflächige Öffnen von Fabriken für das Tageslicht und somit für die Verbesserung der Arbeitsbedingungen.

13.2 Balkenroste

Wenn zwei Serien von parallelen Balken rechtwinklig zueinander angeordnet werden, so entsteht, ähnlich wie bei den Fachwerken, ein räumliches Tragwerk,

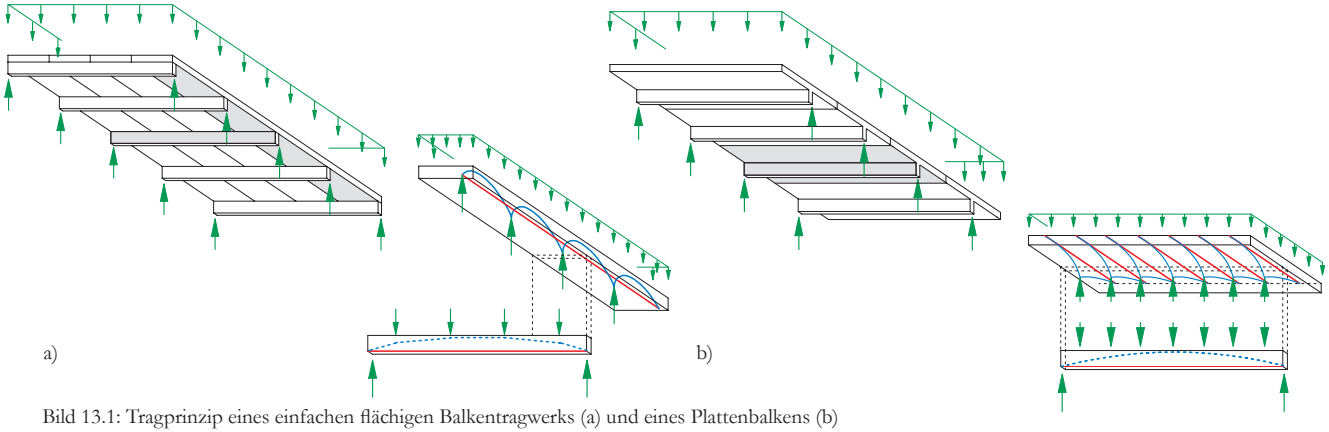


Bild 13.1: Tragprinzip eines einfachen flächigen Balkentragwerks (a) und eines Plattenbalkens (b)



Bild 13.2: Forum Solaranlage, Barcelona, 2004, Arch.: Martínez Lapeña-Torres Arquitectos, Ing.: Esteyco

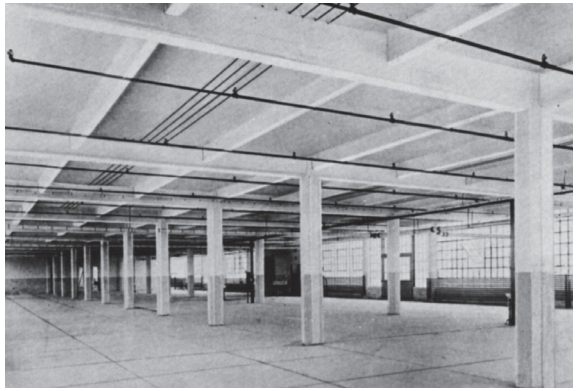


Bild 13.3: Ford Motor Company Plant, Highland Park, 1909 , Arch. & Ing.: Albert Kahn

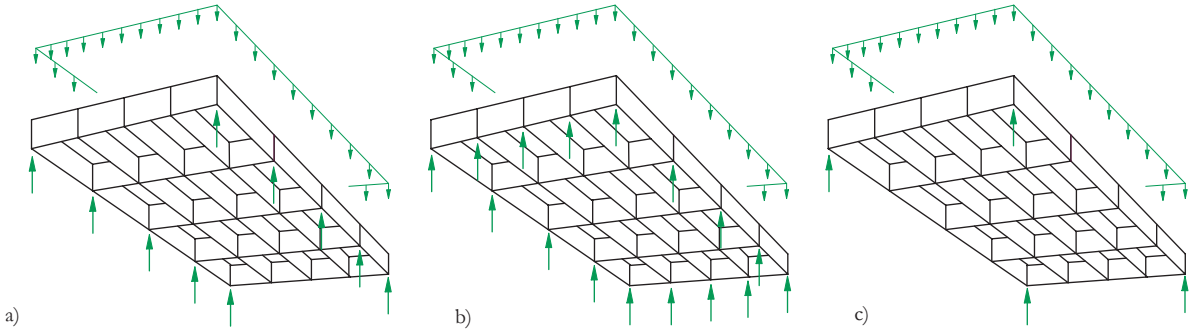


Bild 13.4: Balkenroste mit Auflagern an zwei Seiten (a), allen vier Seiten (b) und in vier Ecken (c)

ein so genannter *Balkenrost*, bei welchem die Auflager mit einer grossen Freiheit angeordnet werden können (vgl. Bild 11.1). Bei einem Tragwerk mit rechteckigem Grundriss und Auflagern an den zwei gegenüberliegenden Seiten ist die Tragwirkung sehr ähnlich zu einem einfachen flächigen Balkentragwerk (Bild 13.4a). Sind dagegen, wie in Bild 13.4b dargestellt, alle vier Seiten aufgelagert, so wird ein Teil der äusseren Lasten mit der einen Balkenserie und der restliche Teil mit der quer dazu verlaufenden zweiten Balkenserie aufgenommen und zu den Auflagern abgetragen. Ein Beispiel hierfür ist die Sporthalle in Losone, bei der die umlaufenden Wandpfeiler als Auflager für den Balkenrost der Decke dienen (Bild 13.5).

Grundsätzlich ist es bei einem Balkenrost möglich, die *Anzahl der Auflager* stark zu *reduzieren* und zum Beispiel den Rost nur an vier Ecken aufzulegen (Bild 13.4c). In diesem Fall müssen die äusseren Lasten gleichzeitig in zwei Richtungen entlang des Gitternetzes möglichst direkt zu den Auflagerpunkten abgetragen werden. Die Balken werden jedoch mit abnehmender Auflageranzahl stärker beansprucht.

Die Neue Nationalgalerie in Berlin von Ludwig Mies van der Rohe (1886-1969) ist ein eindrückliches Beispiel für ein solches Tragwerk (Bild 13.6). Das Tragwerkskonzept ist dabei aufs Engste verknüpft mit der Entwurfsidee. Durch die Reduktion der Auflagerpunkte für den 64,8 m breiten quadratischen Balkenrost entsteht der Eindruck eines schwerelos schwebenden Dachs. Der darunter liegende Ort wird hierdurch markiert, ohne den Raumfluss zu behindern. Zudem entsteht ein stützenfreier Raum, der durch seine Flexibilität die Möglichkeit verschiedenartiger Ausstellungen bietet.

Es können auch mehrere Serien von Balken kombiniert werden. So hat Louis Kahn für die Kunsthalle der Yale University drei Serien verwendet, wodurch ein *dreieckförmiger Balkenrost* entsteht (Bild 13.7). Die Balken sind dabei als Stahlbetonträger mit einem T-förmigen Querschnitt ausgeführt, und die oben liegenden Flansche bilden eine durchgehende Platte.

Eine weitere mögliche Variation für den Balkenrost besteht in der Verwendung von *frei geformten Balken*. Im Tragwerk der Wollfabrik Gatti verlaufen die Stege der Balken gekrümmt und die oberen Flansche sind Bestandteil einer durchgehenden Decke (Bild 13.8). Durch ihre Form wird es möglich, die Lasten auf direkterem Weg radial zu den Auflagern abzutragen. Die tangential verlaufenden Balken, welche die Stützen umkreisen, haben die Aufgabe, die Lasten zu verteilen und die Umlenkkräfte der Druck- und Zugzonen der radialen Balken aufzunehmen.



Bild 13.5: Mehrzweckhalle Losone, 1994-97, Arch.: Livio Vacchini, Ing. R. Rossi



Bild 13.6: Neue Nationalgalerie, Berlin, 1965-68, Arch.: Ludwig Mies van der Rohe, Ing.: H. Dienst



Bild 13.7: Art Gallery, Yale University, New Haven, 1951-53, Arch.: Louis Kahn, Ing.: Henry A. Pfisterer

13.3 Platten

Die Einführung des Stahlbetons hat es möglich gemacht, das wohl am häufigsten in der Architektur angewendete Tragwerkselement zu entwickeln, die *Platte*. Die Tragwirkung dieses Elements kann mit Hilfe von *im Inneren der Platte angeordneten Balken* verstanden werden. Durch ein solches System von eingeschriebenen Balken werden die äusseren Lasten aufgenommen und zu den Auflagern abgeleitet. Exemplarisch soll dies an einer rechteckigen Platte mit unterschiedlicher Last- und Auflageranordnung verdeutlicht werden.

Wird die auf zwei gegenüberliegenden Seiten aufgelagerte Platte gemäss Bild 13.9a durch eine gleichmässig verteilte äussere Last auf ihrer gesamten Oberfläche belastet, so kann die Platte gedanklich in eine Serie von parallelen Streifen zerschnitten werden, wobei jeder dieser Streifen das Tragverhalten eines Balkens besitzt. Wie im Kapitel 14 gezeigt wird, verbiegen sich die Balken unter den äusseren Lasten. Wenn alle Streifen gleich breit gewählt und gleich stark belastet werden, verformen sich alle Balken gleich stark, so dass eigentlich keine Interaktion zwischen den einzelnen Balken vorhanden ist. Die gesamte Platte verhält sich in diesem Fall gleichförmig.



Bild 13.8: Wollfabrik Gatti, Rom, 1951-53, Arch. & Ing.: Pier Luigi Nervi

Wird die gleiche, in unabhängig wirkende Streifen zerschnittene Platte mit einer konzentrierten Last in ihrem Zentrum belastet, so wird sich lediglich der Balken unter der Last nach unten verformen, während alle anderen Balken in ihrer ursprünglichen Lage verbleiben und keine Durchbiegung erfahren. Dies entspricht sicherlich nicht dem tatsächlichen Verhalten der Platte. In Wirklichkeit *bildet sich ein Balkenrost aus*, dessen quer verlaufender Balken in der Nähe der konzentrierten Last die Aufgabe übernimmt, die Last auf mehrere Balken in der anderen Richtung zu verteilen (Bild 13.9b).

Wird die Platte an ihren vier Rändern aufgelegt, dann können Balken in mehrere Richtungen angeordnet werden (Bild 13.9c). Im Unterschied zu dem Balkenrost im Bild 13.4c bilden sich bei den Platten die eingeschriebenen Balken zur Lastabtragung *in der Regel nicht in orthogonaler Richtung* aus, sondern verlaufen innerhalb des Materials derart, dass die Wege für den Transfer der Lasten zu den Auflagern möglichst effizient werden.

Einer der ersten, der das enorme Potential der Stahlbetondecken für das Bauen erkannt hat, war Robert Maillart. Er liess 1908 ein System patentieren, bei dem die Decken ohne zusätzliche Verstärkungen durch Balken direkt auf Stützen aufgelegt werden.

Die Tragweise dieses Systems ist dabei identisch mit der von Nervi für die Wollfabrik Gatti konstruierten Platte mit gekrümmten Stegen, bei welcher sich der Balkenrost von den Stützen aus entwickelt (Bild 13.8). Im Inneren der Platte in Maillarts System bilden sich tatsächlich Balken dieser Art aus. Ihre Beanspruchung ist schematisch im Bild 13.10 dargestellt und verläuft über dem Auflager wie bei einem Durchlaufträger. Das Zusammenlaufen aller Balken in einem relativ kleinen Bereich über dem Auflager bewirkt eine sehr grosse Beanspruchung des unteren auf Druck beanspruchten Bereichs in dessen Nähe sich zusätzlich Druck- und Zug-

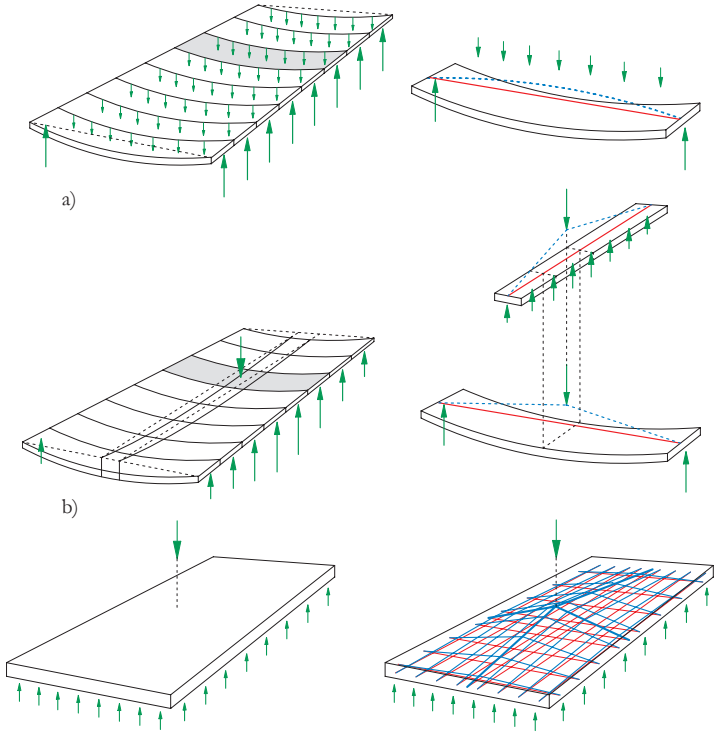


Bild 13.9: Tragverhalten einer Rechteckplatte

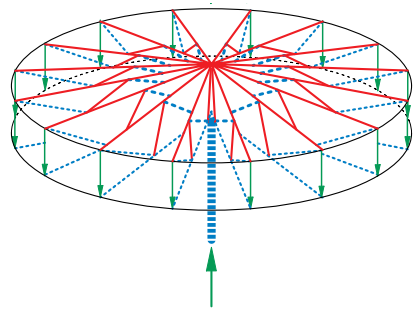


Bild 13.10: Tragweise der Platte in der Nähe des Auflagers über der Stütze

diagonalen ausbilden müssen, und des oberen auf Zug beanspruchten Bereichs. Um dieses Problem zu lösen, erhöhte Maillart lokal die Plattenstärke in der kritischen Zone und erhielt dadurch eine trichterförmige Platte, welche als *Pilzdecke* bezeichnet wird. Erstmalig verwendete Maillart die Pilzdecke für das Zürcher Lagerhaus in der Giesshübelstrasse (Bild 13.11). Eine sehr bekannte Anwendung einer Pilzdecke ist der Verwaltungstrakt des Johnson Wax Buildings von Frank Lloyd Wright (Bild 13.12). Der weniger stark beanspruchte flache Anteil der Decke zwischen den pilzförmigen Auflagern wurde hierbei weitgehend aufgelöst, um die Beleuchtung des Innenraums zu ermöglichen. Beide Beispiele zeigen eindrücklich die Effizienz dieses Tragwerks.

Die Verwendung von Stahlbeton mit höheren Festigkeiten, von adäquaten Bewehrungen und vor allem die Wahl einer ausreichenden Plattenstärke erlauben es, die Verstärkung der Platten oberhalb der Stützen mit Pilzen zu vermeiden. Dieses von Le Corbusier als *Maison-Domino* propagierte Tragwerk ermöglicht das Auflagern der flachen Decke direkt auf die freistehenden Stützen (Bild 13.13). Über den Stützen weist eine entsprechend aufgelagerte Platte aber sehr starke Beanspruchungen auf, während die inneren Kräfte in den Feldern im Vergleich hierzu relativ gering sind.

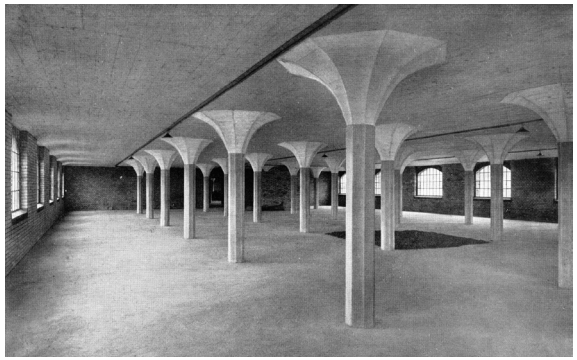


Bild 13.11: Lagerhaus Giesshübelstrasse, Zürich, 1910, Arch. & Ing.: Robert Maillart

13.4 Faltwerke

Wie in Abschnitt 13.1 gezeigt wurde, kann jede Platte als eine Serie von miteinander verbundenen Balken betrachtet werden. Zudem kann nach Kapitel 12 ein Balken durch ein eingeschriebenes Fachwerk diskretisiert und hierdurch das Tragverhalten annäherungsweise dargestellt werden. Zusammen ermöglicht dies, das Tragverhalten einer Platte durch eine gitterartig angeordnete Folge von ebenen Fachwerken wie im Bild 13.14a zu approximieren.

Eine alternative Beschreibung des Tragverhaltens einer Platte wird möglich, wenn die Fachwerke nicht mehr parallel, sondern geneigt eingeschrieben werden. Dabei entsteht ein sogenanntes *Faltwerk* (Bild 13.14b).

Faltwerke sind räumliche Tragwerke, die aus ebenen Tragelementen bestehen, welche entlang ihrer Kanten miteinander verbunden sind. Auf diese Art können bei äusserst geringem Materialverbrauch sehr steife und weit gespannte Tragwerke erzielt werden, die nicht nur als plattenartige, sondern auch als rahmen- und schalenartige Tragwerke eingesetzt werden können (Bild 13.16). Dabei bilden sich im Bereich der Kanten Gurte aus und im Bereich der ebenen Flächen Diagonalen und Pfosten. Falls die äusseren Kräfte verteilt angreifen, dann können die ebenen Flächen zusätzlich noch als Plattenelemente wirken und die verteilten Lasten zu den Kanten abtragen.

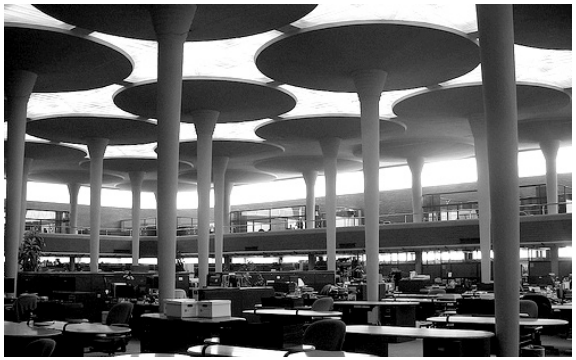


Bild 13.12: Johnson Wax Building, Racine, 1936-39, Arch.: Frank Lloyd Wright

Im Bild 13.14c ist die Tragwirkung eines einfachen Faltwerkes dargestellt. Die an der Kante angreifenden äusseren Lasten werden in zwei in den Ebenen der angrenzenden Scheiben liegende Kräftescharen aufgeteilt. Die Tragwirkung der einzelnen Scheiben entspricht dann derjenigen eines Balkens bzw. einer Scheibe. Es ist dabei zu bemerken, dass bei geneigten Scheiben horizontale Auflagerkräfte auftreten können, welche mittels eines Zugbandes oder mittels einer Querscheibe ins Gleichgewicht gebracht werden müssen.

Dieses grundsätzliche Verständnis des Tragverhaltens von Faltwerken kann sinngemäss auch *auf komplexer geformte räumliche Tragwerke übertragen* werden, wie etwa das bereits Kapitel 12 behandelte UNESCO-Gebäude von Marcel Breuer und Berhard Zehrfuss (Bild 13.17). Durch die Ausbildung eines gefalteten Rahmentragwerks kann der Stahlbeton auf sehr effiziente Art eingesetzt werden und dadurch der Materialbedarf reduziert werden.

Eine gekrümmte Fläche, etwa eine Zylinderschale, kann durch ein Faltwerk, bestehend aus einer beliebigen An-



Bild 13.13: Doppelhaus, Weissenhofsiedlung, Stuttgart, 1926, Arch.: Le Corbusier & Pierre Jeanneret

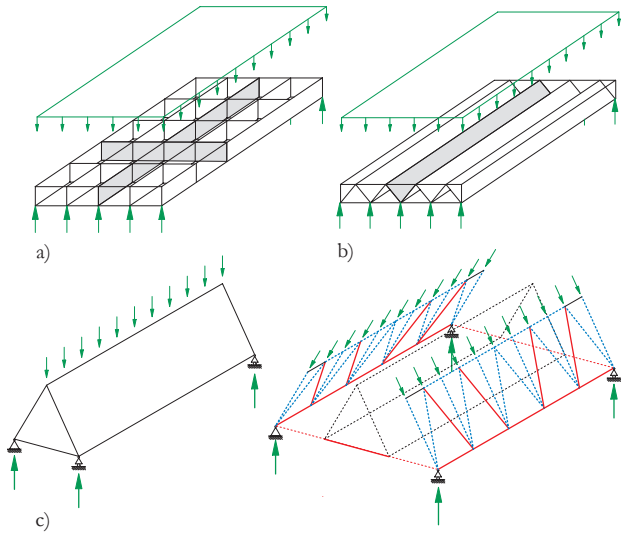


Bild 13.14: Platte als Balkenrost (a) und Faltwerk (b) sowie Tragverhalten eines Faltwerks (c)

zahl von einzelnen Scheiben, angenähert werden (Bild 13.15a). Durch fortgesetzte Verfeinerung der *Approximation* nähert sich das Faltwerk mehr und mehr der gekrümmten Ausgangsform an. Durch einen solchen Prozess der Annäherung kann daher das Tragverhalten von *Zylinderschalen* aus dem Tragverhalten von Faltwerken abgeleitet werden.

Die Zylinderschalenelemente tragen somit *als Balken in Längsrichtung* mit der Zugzone im Bereich der unteren Ränder und der Druckzone entlang des oberen Bereiches der Schale, was mit mehreren Bogen-Seiltragwerken dargestellt werden kann (Bild 13.15b). *In Querrichtung* trägt die Zylinderschale dagegen *wie ein Gewölbe*, welches seine Auflagerkräfte auf das Längssystem abgibt.

An den beiden Enden der Zylinderschale kann die Kraft wegen ihrer Verteilung entlang des Randes nicht direkt in die Auflager abgegeben werden. Aus diesem Grund sind Endquerträger notwendig. Es ist dabei zu beachten, dass diese *Endquerträger als Balken* tragen, obwohl sie bogenförmig sind, da kein Tragelement zur Aufnahme der horizontalen Auflagerkraftkomponente vorhanden ist. Deutlich sichtbar wird dieses Tragverhalten von Zylinderschalen bei der Überdachung des Aussenbereichs in Louis Kahns Kimbell Art Museum in Forth Worth (Bild 13.18).

Bei den Zylinderschalen handelt es sich somit nicht um Gewölbe, obschon die Form derjenigen der Gewölbe entspricht (vgl. Abschnitt 7.7). Bei den Zylinderschalen sind die Auflager aber punktförmig ausgebildet, bei den Gewölben dagegen linienförmig über den gesamten Rand des Gewölbes. *Das Tragverhalten hängt somit nicht nur von der Form des Tragwerks ab, sondern auch von den statischen Bedingungen an den Auflagern.* Erst das Zusammenspiel von Form, Auflagersituation und Belastung erlaubt eine genaue Aussage über den inneren Kräftefluss und somit über das Tragverhalten.

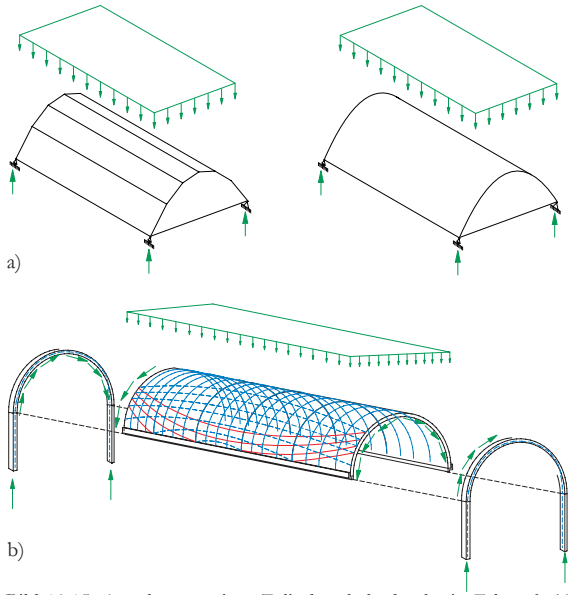


Bild 13.15: Annäherung einer Zylinderschale durch ein Faltwerk (a) und Tragverhalten einer Zylinderschale (b)



Bild 13.16: Masjid Negara Moschee, Kuala Lumpur, 1965, Arch.: Howard Ashley & Hisham Albakri & Baharuddin Kassim

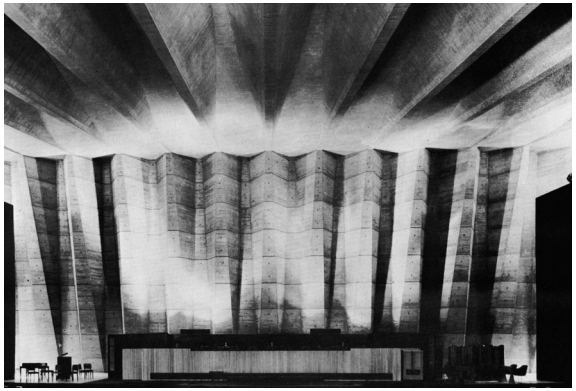


Bild 13.17: Sitz der UNESCO in Paris, 1952, Arch. Marcel Breuer und Bernhard Zehrfuss, Ing.: Pier Luigi Nervi

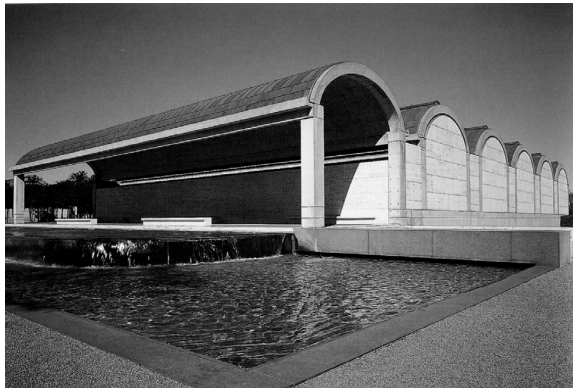


Bild 13.18: Kimbell Art Museum, Fort Worth, 1972, Arch.: Louis Kahn, Ing.: August Komendant

14 Biegung

Im Kapitel 12 wurde gezeigt, dass das Tragverhalten der Balken mit Hilfe von Fachwerken beschrieben werden kann. Durch Aufblasen der Gurte, Pfosten und Diagonalen des Fachwerks kann das gesamte Material des Balkens ausgenützt werden. Im vorliegenden Kapitel wird das Tragverhalten der Gurte genauer untersucht. Dieses Tragverhalten wird als *Biegetragwirkung* bezeichnet. Die Einflüsse der inneren Kräfte, der Verformungen und der Steifigkeit der Gurte werden behandelt. Weiter wird der Tragwiderstand bei plastischem Materialverhalten diskutiert und es werden Hinweise zur vernünftigen Festlegung der Querschnittabmessungen von Balken- und Plattentragwerken gegeben.

14.1 Biegung und Krümmung

Wenn bei einem rechteckigen Balken der Bogen des Bogen-Seiltragwerks in einem Bereich horizontal verläuft, sind die Diagonalen und somit der Stegbereich nicht beansprucht. Die inneren Kräfte beschränken sich in diesem Fall auf die Druck- und Zugkräfte in den randnahen Zonen, die Gurtkräfte des Fachwerks. Diese Art von Beanspruchung wird als *reine Biegung* bezeichnet (Bild 14.1). Falls zusätzlich zu den Gurten auch die Diagonalen beansprucht sind, liegt eine sogenannte *Biegung mit Schubbeanspruchung* vor.

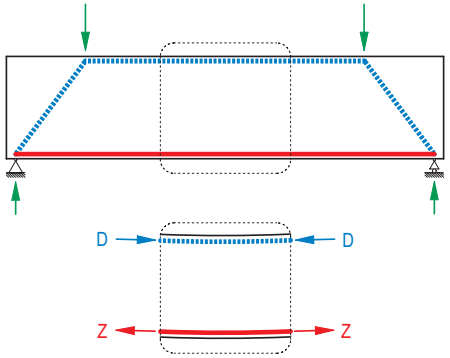


Bild 14.1: Biegung eines Balkens mit zugehörigen Verformungen

Die im Bild 14.1 dargestellten horizontalen Druck- und Zugstreben breiten sich im Material aus. Bei linear elastischem Materialverhalten sind die Spannungen nicht konstant über die Höhe der Druck- und Zugstrebe verteilt, sondern es findet eine kontinuierliche Veränderung von D nach Z statt. Wird der Trägerbereich des im Bild dargestellten Subsystems zum Beispiel in fünf horizontale Streben unterteilt, so nehmen die Verformungen linear mit dem Abstand der Streben vom Schwerpunkt des Querschnittes bzw. von der Trägerachse zu (Bild 14.2).

Die Schwerpunkte der Endquerschnitte der horizontalen Streben liegen auf einer Geraden. Durch kontinuierliche Verfeinerung der Strebenhöhe kann daraus geschlossen werden, dass unter reiner Biegung die gesamte Querschnittsfläche entlang dieser Geraden angeordnet sein muss. Genau dies hat Henri Navier (1785-1836) als Hypothese vorgeschlagen, nämlich dass *ebene Querschnitte* eines Balkens nach der Verkrümmung des Balkens *eben bleiben*. Diese Hypothese trifft nur bei reiner Biegung exakt zu, sie wird in der klassischen Biegelehre im Sinne einer Vereinfachung auch im Fall von Biegung mit Schubbeanspruchung beibehalten.

Da die Dehnung und Stauchung der Streben unter der Annahme linear elastischen Materialverhaltens bei gegebenen Strebenkräften linear abhängig sind von der Länge der Streben, treffen sich die Verformungslinien verschiedener Querschnitte gemäss Bild 14.2 in einem Punkt, dem sogenannten *Krümmungszentrum*. Falls die einzelnen Streben gegenseitig fest miteinanderverbunden sind, nimmt der Balken die Form eines Kreissegmentes gemäss Bild 14.3 an.

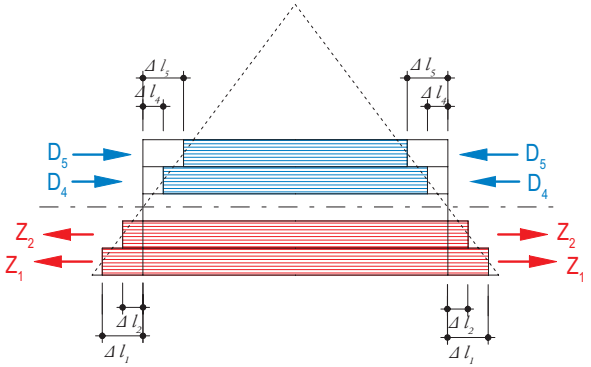


Bild 14.2: Verteilung der Verformungen über die Trägerhöhe

Allgemein wird die *Krümmung* χ eines Balkens als *Kehrwert seines Krümmungsradius r* definiert:

$$\chi = \frac{1}{r} \ .$$

Die beiden Werte sind somit umgekehrt proportional: je kleiner der Krümmungsradius, umso grösser ist die Krümmung. Alternativ kann statt der Krümmung auch der Krümmungswinkel φ eines Balkenelementes mit der Länge x angegeben werden.

Für den Zusammenhang des Krümmungswinkels φ, der Balkenlänge x und des Krümmungsradius r gilt dabei:

$$\frac{x}{\varphi} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360^\circ} \quad \textit{also} \quad r = \frac{x}{\varphi} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \ .$$

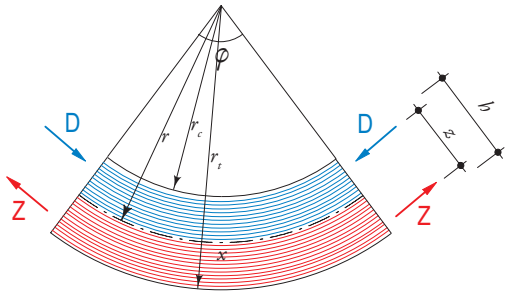


Bild 14.3: Verkrümmung des Balkensegmentes

Damit folgt:

$$r = r_c + \frac{h}{2} = \frac{(1+\varepsilon_c)\cdot x}{\varphi}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} + \frac{h}{2}$$

und

$$r = r_t - \frac{h}{2} = \frac{(1+\varepsilon_t)\cdot x}{\varphi}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} - \frac{h}{2}$$

also

$$h = \frac{h}{2} + \frac{h}{2}$$

$$h = \frac{(1+\varepsilon_t)\cdot x}{\varphi}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} - r - \frac{(1+\varepsilon_c)\cdot x}{\varphi}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} + r$$

$$h = \frac{x}{\varphi}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}\cdot(\varepsilon_t - \varepsilon_c)$$

und damit

$$\frac{h}{\varepsilon_t - \varepsilon_c} = \frac{x}{\varphi}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = r.$$

Die Krümmung χ beträgt somit

$$\chi = \frac{1}{r} = \frac{(\varepsilon_t - \varepsilon_c)}{h}.$$

wobei die Druckdehnung ε_c ein negatives Vorzeichen aufweist, das heisst, in der Krümmungsformel sind die Absolutbeträge von ε_c und ε_t zu addieren. Die Krümmung des Balkens ist demnach linear abhängig von den Verformungen der Druckzone und der Zugzone und umgekehrt proportional zum Abstand h dieser beiden.

Die *Krümmung* ist somit die verallgemeinerte Verformung eines Balkens, welche als Folge der zugehörigen verallgemeinerten Beanspruchung, nämlich der *Biegung* des Balkens auftritt, genau wie die Verlängerung oder Verkürzung das Resultat einer Zug- oder einer Druckbeanspruchung ist.

Je grösser die Verlängerung der gezogenen Zone und die Verkürzung der gedrückten Zone ist, desto grösser ist die Krümmung des Balkens. Ein weiterer Parameter, welcher die Krümmung beeinflusst, ist die Höhe des Balkens, oder genauer formuliert, der Abstand zwischen dem Schwerpunkt der Druckzone und jenem der Zugzone, welcher als *wirksame Höhe z* bezeichnet wird.

14.2 Biegesteifigkeit

Die Biegung ist nicht eine einfache Kraftgrösse, sondern analog zum Hebelgesetz als das Produkt $Z \cdot z$ bzw. $-D \cdot z$ definiert, wobei der *Abstand z* zwischen den inneren Kräften D und Z der wirksamen Höhe des Balkens entspricht. Aus dem Bild 14.4 ist ersichtlich, dass bei gegebener Intensität der Biegung das Produkt $Z \cdot z$ bzw. $-D \cdot z$ konstant ist, die inneren Kräfte D und Z dagegen abhängig von der wirksamen Balkenhöhe sind.

Im Kapitel 5 wurde gezeigt, dass bei linear elastischem Materialverhalten die Verformung linear mit der Kraft verknüpft ist und dass die Steifigkeit die Proportionalitätskonstante darstellt. Ebenso ist bei *linear elastischem Materialverhalten die Krümmung linear mit dem Biegemoment verknüpft,* und die *Proportionalitätskonstante* ist die so genannte *Biegesteifigkeit B.*

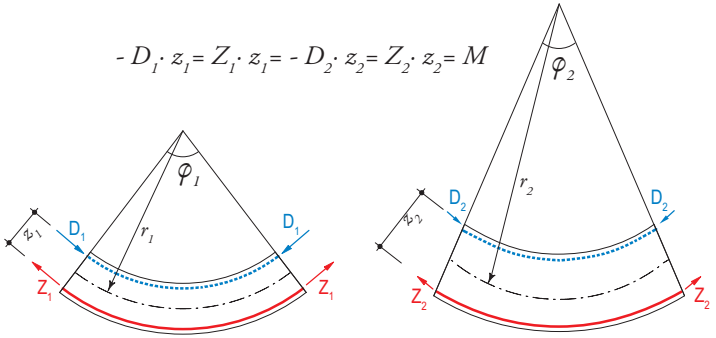


Bild 14.4: Biegung bei verschiedenen Balkenhöhen

Wie in Kapitel 8 (vgl. Bild 8.30) bereits erwähnt wurde, wird das Produkt $Z \cdot z$ bzw. $-D \cdot z$, als *Biegemoment M* bezeichnet:

$$Z \cdot z = -D \cdot z = M \text{ [Nmm]}.$$

Im Bild 14.5 ist die Biegungs-Krümmungs-Beziehung der aus dem Kapitel 5 bekannten Kraft-Dehnungs-Beziehung gegenübergestellt. Es gilt sinngemäss:

bei Kraftbeanspruchung: $Z = S \cdot \Delta l$

und bei Biegung: $M = B \cdot \chi$.

Beide Beziehungen sind gültig für linear elastisches Materialverhalten.

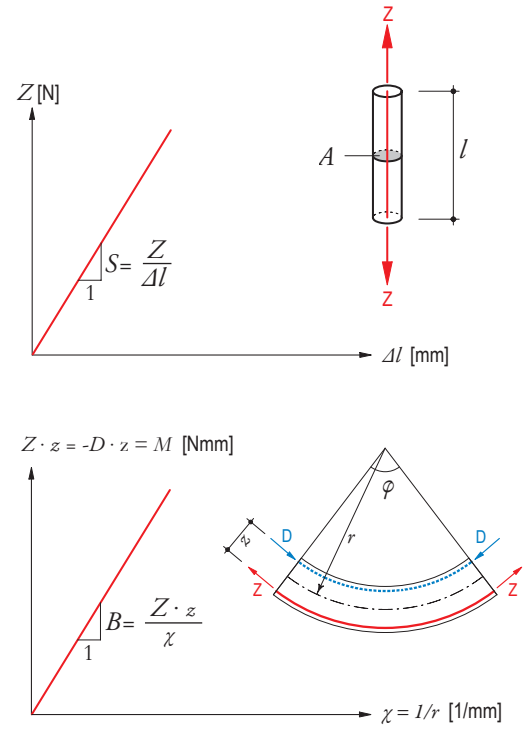


Bild 14.5: Kraft-Verlängerungsdiagramm und Biegemoment-Krümmungsdiagramm

Balken mit Rechteckquerschnitt

Bei auf Zug und Druck beanspruchten Stäben ist die Steifigkeit *S* von der Materialsteifigkeit, d.h. vom Elastizitätsmodul *E*, von der Querschnittsfläche und von der Länge des Stabes abhängig (vgl. Kapitel 5). Ähnliche Abhängigkeiten können ebenfalls für die Balken unter Biegebeanspruchung unter der Annahme linear elastischen Materialverhaltens hergeleitet werden.

Dank der Hypothese von Navier wird es möglich, die *Spannungen über die Querschnittshöhe* zu ermitteln (Bild 14.6). Diese sind *linear verteilt*, mit einem negativen Wert am Druckrand, mit einem positiven Wert am Zugrand und mit dem Wert Null auf halber Höhe, der so genannten *neutralen Achse* des Querschnittes. Die lineare Verteilung führt zu einer so genannt dreieckförmigen Spannungsverteilung in der Druck- und in der Zugzone. Die Resultierenden *D* und *Z* müssen, um statisch äquivalent zu den Spannungen zu sein, in den Schwerpunkten der Spannungsdreiecke angreifen, was zur wirksamen Höhe *z* führt:

$$z = \frac{2}{3} \cdot h \,.$$

Bei einem Balken aus Gummi ist auch die Krümmung bei gleicher Geometrie und Belastung wesentlich grösser als bei einem Balken aus Stahl. Die Biegesteifigkeit *B* ist ein Mass für dieses unterschiedliche Krümmungsverhalten und kann aus der Gleichung $M = B \cdot \chi$ ermittelt werden:

$$B = \frac{M}{\chi}$$

Mit $M = Z \cdot \frac{2}{3} \cdot h$ und $\chi = \frac{(\varepsilon_t - \varepsilon_c)}{h} = \frac{(\sigma_t - \sigma_c)}{E \cdot h}$ folgt:

$$B = \frac{Z \cdot \frac{2}{3} \cdot h}{\frac{\sigma_t - \sigma_c}{E \cdot h}} = \frac{E \cdot Z \cdot \frac{2}{3} \cdot h^2}{\sigma_t - \sigma_c} \,.$$

Die Randspannungen σ_t und σ_c sind mit den inneren Druck- und Zugkräften folgendermassen verknüpft:

$$-\sigma_c = \sigma_t = \frac{Z}{\frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{h}{2}} = \frac{4 \cdot Z}{t \cdot h} \,.$$

Daraus folgt:

$$B = \frac{E \cdot Z \cdot \frac{2}{3} \cdot h^2}{\frac{8 \cdot Z}{t \cdot h}} = \frac{E \cdot t \cdot h^3}{12} \,.$$

für die *Biegesteifigkeit des Balkens mit Rechteckquerschnitt.* Sie *ist wie die Steifigkeit S direkt proportional zum Elastizitätsmodul E.* Der Einfluss der *Stärke t* ist leicht verständlich: wenn diese verdoppelt wird, wird auch die Biegebeanspruchung im Balken halbiert, was zu halbierten Verformungen der Gurtelemente und zur halbierten Krümmung führt (Bild 14.7a und b). Die Steifigkeit verdoppelt sich somit, genau wie wenn zwei gleiche Balken nebeneinander angeordnet wären; mit anderen Worten ist die *Biegesteifigkeit B direkt proportional zur Stärke t.*

Wenn dagegen bei gleicher Geometrie und Belastung die Höhe *h* verdoppelt wird, ergibt sich Folgendes:

- Die wirksame Höhe *z* verdoppelt sich und die Gurtkräfte halbieren sich
- die Flächen der Druck- und der Zugzone verdoppeln sich ebenfalls
- die Zugspannung σ_t und die Druckspannung σ_c, welche durch Division der Gurtkräfte durch die Querschnittsflächen erhalten werden, sind nur noch 25 % derjenigen des ursprünglichen Balkens
- auch die Dehnungen ε_t und ε_c welche durch Division der Spannungen durch den Elastizitätsmodul erhalten werden, sind auf 25 % reduziert worden
- gemäss Bild 14.3 ist der Krümmungswinkel φ proportional zu den Dehnungen ε_t und ε_c und umgekehrt proportional zur wirksamen Höhe *z*, was bedeutet, dass bei einer Verdoppelung der Höhe ein auf 1/8 reduzierter Krümmungswinkel resultiert.

Daraus folgt, dass bei einer Verdoppelung der Höhe *h* die Biegsteifigkeit *B* 8-mal grösser wird (Bild 14.7a und c). In anderen Worten entspricht diese Biegesteifigkeit derjenigen von acht nebeneinander oder aufeinander gelegten, nicht miteinander verbundenen Balken! Die *Biegesteifigkeit B eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt* ist in der Tat *von der dritten Potenz der Höhe h des Balkens abhängig.*

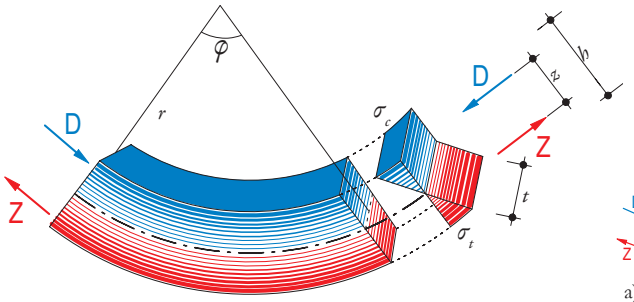


Bild 14.6: Innere Kräfte im gebogenen Balken mit Rechteckquerschnitt bei linear-elastischem Materialverhalten

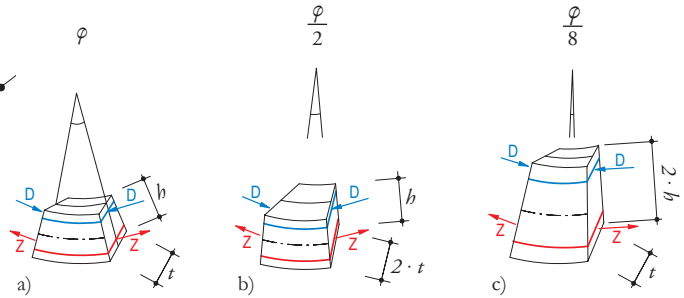


Bild 14.7 Einfluss der Breite und der Höhe des Querschnitts auf die Biegesteifigkeit

Balken mit Doppel-T-Querschnitt und vertikalem Steg

Die statische Effizienz der behandelten rechteckigen Querschnitte kann erhöht werden, indem bei konstanter Materialmenge und totaler Höhe h die Tragwirkung verbessert wird. So kann zum Beispiel ein Teil des Materials im unteren Bereich der Druckzone herausgeschnitten werden und dieses im oberen Bereich der Druckzone wieder so angesetzt werden, dass der Balken breiter wird. Nach Wiederholung des gleichen Vorgehens bei der Zugzone resultiert ein Querschnitt gleicher Querschnittsfläche und Höhe, aber mit einem deutlich grösseren Abstand der Schwerpunkte der Zugzone und der Druckzone (Bild 14.8). Die Querschnitte dieser Art, definiert als *Doppel-T oder I*, werden sehr häufig im Stahlbau verwendet. Sie können in der Produktion sehr einfach gewalzt (Stahl) oder gezogen (Aluminium) werden.

Die horizontalen Teile, welche die Aufgabe haben, die inneren Zug- und Druckkräfte aus der Biegung aufzunehmen, werden als *Flansche* bezeichnet. Das vertikale Element, *Steg* genannt, übernimmt dagegen die inneren Druck- und Zugkräfte, welche den Kräften der Diagonalen im Fachwerk entsprechen.

Bei einem vor allem auf Biegung beanspruchten Balken ist es zweckmässig, einen Querschnitt mit breiten und dicken Flanschen und einem dünnen Steg zu wählen. Im Zusammenhang mit der Stabilität der Stahlbautragwerke ist zu erwähnen, dass oberhalb einer gewissen Grenze, also bei zu breiten Flanschen oder zu dünnem Steg, das Material nicht mehr voll ausgenutzt werden kann, weil Querverformungen eine Instabilität oder ein lokales Versagen erzeugen können, bevor die Festigkeit des Materials erreicht wird (vgl. Kapitel 15).

Im Rahmen des vorliegenden Einführungskurses sollen solche Effekte vernachlässigt werden. Es wird ein idealisierter Querschnitt untersucht, bei welchem das gesamte Material in den Flanschen angeordnet ist. In diesem Fall ist die wirksame Höhe z des Querschnitts gleich dem Abstand zwischen den Schwerpunkten der Druck- und der Zugzone, d.h. $z = h - t_f$ und somit sehr nahe an der totalen Höhe h. Es resultiert in Bezug auf die Biegesteifigkeit eine praktisch 50% grössere wirksame Höhe als beim Rechteckquerschnitt. Weiter wird angenommen, dass in den Flaschen konstante Spannungen vorhanden sind (Bild 14.9).

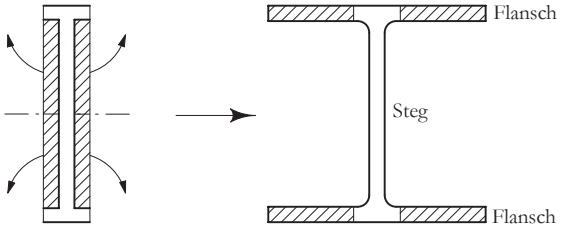


Bild 14.8: Rechteck-Querschnitt und Doppel-T-Querschnitt mit gleicher Höhe und gleicher Materialmenge

Die Biegesteifigkeit B ist linear vom Elastizitätsmodul E und von der Querschnittsfläche der Flansche $b \cdot t_f$ abhängig. Wenn die Höhe des Querschnittes verdoppelt wird, resultieren bei gleicher Geometrie und Belastung des Balkens halb so grosse Spannungen σ_c und σ_t und somit auch halb so grosse Dehnungen ε_c und ε_t in den Flanschen. Der Krümmungswinkel φ beträgt nur noch ein viertel. Mit anderen Worten wird bei einer Verdoppelung der Querschnitthöhe die Biegesteifigkeit vervierfacht: die Biegesteifigkeit B ist somit vom Quadrat der Höhe h abhängig.

Zusammenfassend resultiert für die *Biegesteifigkeit* B des Balkens mit Doppel-T-Querschnitt, wenn die Flanschstärke t_f sehr klein ist gegenüber der Höhe h, so dass die wirksame Höhe praktisch identisch mit der

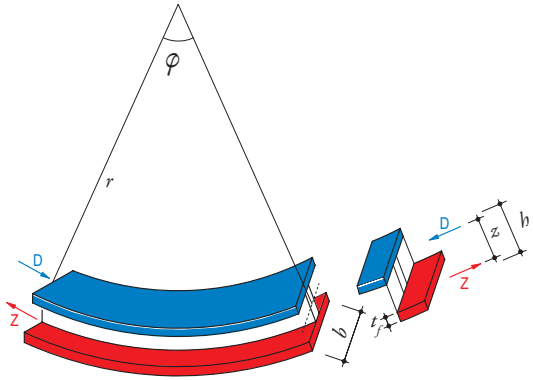


Bild 14.9: Innere Kräfte im gebogenen Balken mit Doppel-T-Querschnitt bei linear elastischem Materialverhalten

tatsächlichen Höhe ist, die folgende Beziehung:

$$B = c \cdot E \cdot b \cdot t_f \cdot h^2.$$

Mit einer ähnlichen Betrachtung wie beim Rechteckquerschnitt ergibt sich $c = 1/2$.

Die *Biegesteifigkeit B des Balkens mit Doppel-T-Querschnitt* beträgt somit:

$$B = \frac{E \cdot b \cdot t_f \cdot h^2}{2} \quad .$$

Balken mit Doppel-T-Querschnitt mit vertikalen Flanschen

Wenn der Balken 90° um seine Längsachse gedreht wird und im Übrigen die Geometrie und die Belastung unverändert bleiben, verhält er sich wie ein Balken mit Rechteckquerschnitt mit der Breite $2 \cdot t_f$ und der *Höhe* b (Bild 14.10):

$$B = \frac{E \cdot 2 \cdot t_f \cdot b^3}{12} = \frac{E \cdot t_f \cdot b^3}{6} \quad .$$

Die Biegesteifigkeit ist somit bedeutend kleiner als

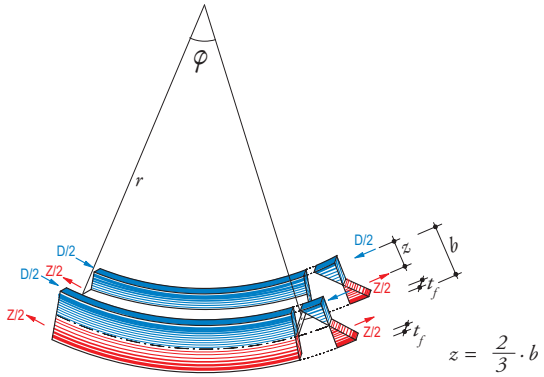


Bild 14.10: Innere Kräfte im um 90° gedrehten gebogenen Balken mit Doppel-T-Querschnitt bei linear elastischem Materialverhalten

beim Balken mit vertikalem Steg. Für den Spezialfall eines quadratischen Querschnittes (b = h) ist die Steifigkeit des Querschnittes mit vertikalen Flaschen dreimal kleiner als beim identischen um 90° gedrehten Querschnitt.

14.3 Verformungen von auf Biegung beanspruchten Balken

Wie im Abschnitt 14.2 gezeigt wurde, ist die Krümmung eines Balkens unter einer gegebenen Beanspruchung abhängig vom Material, d.h. vom *Elastizitätsmodul E* und von der *Geometrie des Querschnitts*. Demzufolge wird auch die so genannte *Durchbiegung w* eines Balkens nebst der *Belastung Q* von *diesen beiden Grössen abhängig* sein (Bild 14.11). Weiter beeinflussen auch die *Auflagerbedingungen* und die Geometrie des Balkens selbst, namentlich seine Länge *l*, die Verformungen des Balkens.

Balken unter Einzellasten

Der Einfluss der Spannweite *l* auf die *Durchbiegung w* des Balkens kann leicht verstanden werden, wenn in Gedanken die Spannweite *l* und der Abstand der Lasten von den Auflagern verdoppelt werden, wobei der Querschnitt des Balkens und die Lasten unverändert bleiben: die inneren Kräfte und die Dehnungen in der Druck- und in der Zugzone werden dann auch verdoppelt, so dass auch die Krümmung sich verdoppelt. Der Krümmungswinkel φ des gesamten Balkens, welcher von der Krümmung und von der Spannweite abhängt, wird in diesem Fall vervierfacht, während die Durchbiegung, welche ihrerseits vom Krümmungswinkel und von der Spannweite abhängt, 8-mal grösser wird als beim Balken mit Spannweite *l* (Bild 14.11b).

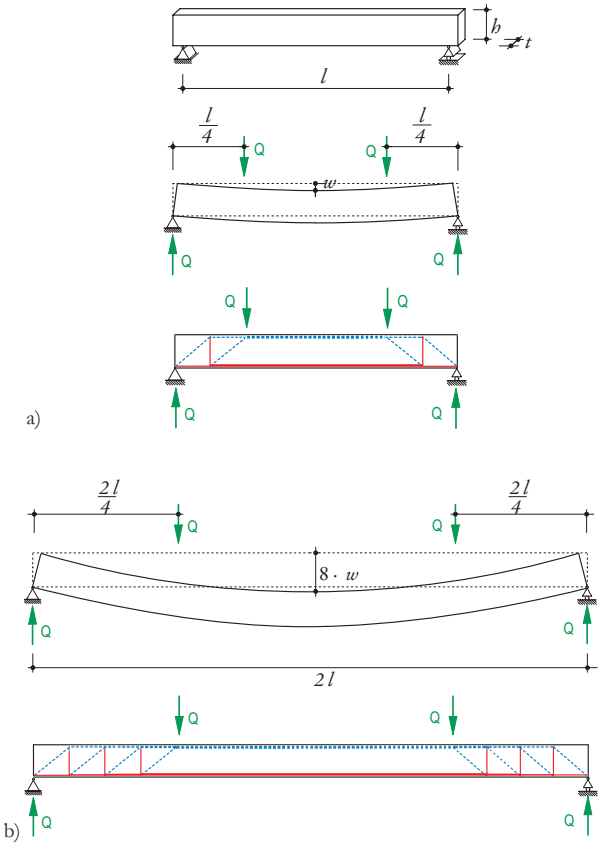


Bild 14.11: Durchbiegung eines Balkens unter zwei Einzellasten (a) und Einfluss der Spannweite *l* auf seine Durchbiegung *w* (b)

Verallgemeinernd heisst das, dass die *Durchbiegung eines Balkens unter konzentrierten Lasten proportional zu seiner Spannweite in der dritten Potenz* ist.

$$w = c \cdot \frac{Q \cdot l^3}{B}.$$

Für eine mittige Einzellast, die auf einen Balken wirkt, gilt $c = 1/48$. Die zulässigen Verformungen sind abhängig von den jeweiligen Kriterien der Gebrauchstauglichkeit, allgemein gilt $l/300$.

Konsolen unter Einzellasten

Auch bei Konsolen, welche wie im Bild 14.12 am Rand unter einer konzentrierten Einzellast beansprucht sind, ist die Durchbiegung *w* proportional zur Last, zur Auskragung der Konsole in der dritten Potenz und umgekehrt proportional zur Biegesteifigkeit, d.h.

$$w = c \cdot \frac{Q \cdot l^3}{B}$$

mit einer Konstante $c = 1/3$. Die Untersuchung der inneren Fachwerke erlaubt es, die Verformungen qualitativ abzuschätzen. Der Zuggurt verlängert sich und der

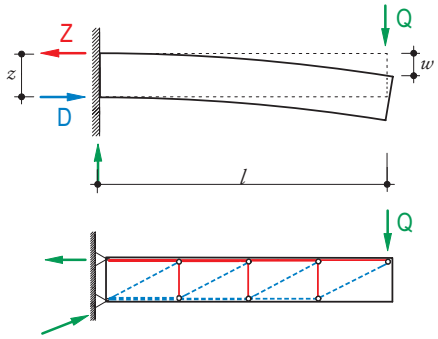


Bild 14.12: Durchbiegung einer Konsole unter einer konzentrierten Einzellast

Druckgurt verkürzt sich, so dass sich die Konsole nach unten durchbiegt. Im Gegensatz zum einfachen Balken, wo das Krümmungszentrum oberhalb des Balkens liegt, befindet sich dieses bei den Konsolen unterhalb des Tragwerks.

Da die Gurtkräfte von ihrem Maximalwert bei der Einspannung gegen das Ende hin zu null abnehmen, nimmt auch die Krümmung den gleichen Verlauf an. Um generell zu verstehen, wie sich ein Balken oder eine Konsole verbiegt, reicht es, die Gurtkräfte zu betrachten. Das Krümmungszentrum befindet sich stets auf derjenigen Seite des Balkens, deren Gurt mit Druckkräften beansprucht ist.

Balken und Konsolen unter gleichmässig verteilten Lasten

Bei einfachen Balken und Konsolen unter gleichmässig verteilten Lasten (Bilder 14.13 und 14.14) ist die Durchbiegung proportional zur Last q, zur Spannweite

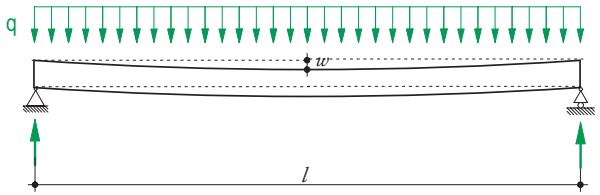


Bild 14.13: Durchbiegung von einfachem Balken unter gleichmässig verteilter Last

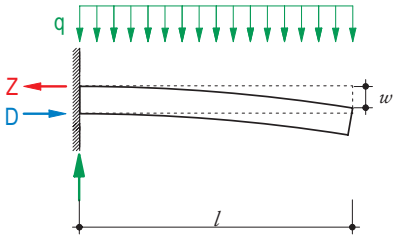


Bild 14.14: Durchbiegungen von einer Konsole unter gleichmässig verteilter Last

der Konsole in der vierten Potenz und umgekehrt proportional zur Biegesteifigkeit:

$$w = c \cdot \frac{q \cdot l^4}{B}.$$

Die Konstanten betragen $c = 5/384$ beim Balken und $c = 1/8$ bei der Konsole.

Wie bei den Fachwerken, nehmen auch bei den Balken durch die Ergänzung einer oder zwei Konsolen die Gurtkräfte im Feld ab. Wenn die Lasten gleichmässig über die Länge des gesamten Tragwerks verteilt sind, sind die Gurtkräfte im Feld umso kleiner und diejenigen bei den Zwischenauflagern umso grösser, je länger die Konsolen im Verhältnis zum Balken sind.

Im Bild 14.14 sind neben den Bogen-Seiltragwerken gemäss Bild 8.30 auch die Verformungen der Balken mit Konsolen dargestellt. Es ist klar zu erkennen, wie mit zunehmender Länge der Konsolen die Durchbiegung des Balkens abnimmt, um bei Konsolen, deren Länge die Hälfte derjenigen des Balkens erreicht, sogar negativ zu werden, das heisst nach oben gerichtet zu sein.

Durchlaufträger

Beim Durchlaufträger entspricht das Bogen-Seiltragwerk und die entsprechende Verformung zwischen zwei Auflagerpunkten im Feld denjenigen eines Balkens mit Konsolen mit $l'/l = 0.4$ (vgl. Bilder 14.15 bis

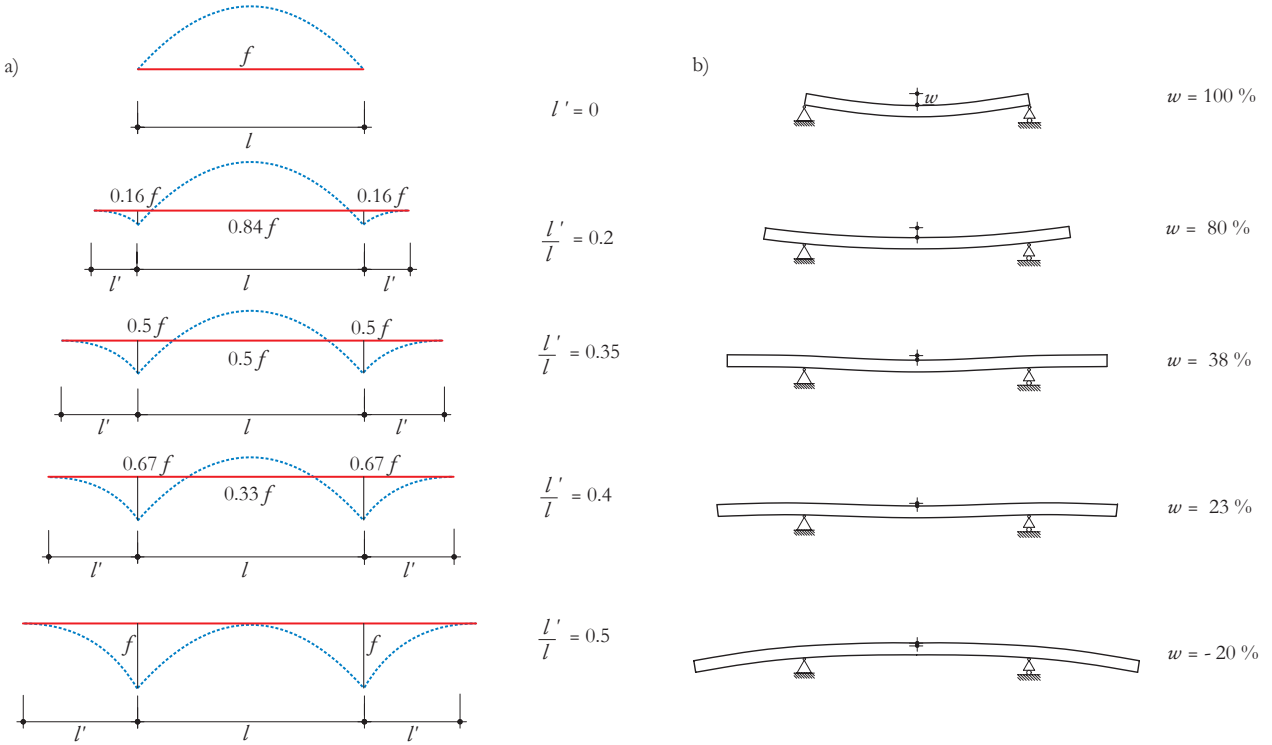


Bild 14.15: Bogen-Seiltragwerke von einfachen Balken mit Konsolen (a) und Durchbiegungen von einfachen Balken mit Konsolen (b)

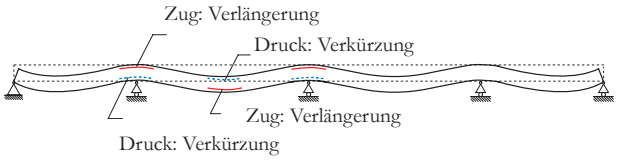


Bild 14.16: Durchbiegungen von Durchlaufträgern

14.16). Für beide Tragwerke unter gleichmässig verteilten Lasten gilt bei linear elastischem Materialverhalten ebenfalls die Beziehung:

$$w = c \cdot \frac{q \cdot l^4}{B}$$

mit einer Konstanten $c = 1/384$.

14.4 Widerstand von auf Biegung beanspruchten Balken

Wenn der Balken aus einem plastischen Material besteht, welches genügend duktil ist, weist die Biegung-Krümmung-Beziehung ähnlich wie die Last-Verformung-Beziehung (Kapitel 5) einen plastischen Ast auf. Dies ist dadurch bedingt, dass wenn die Spannung der oberen und unteren Randfasern des Balkens die Fliessgrenze erreicht, die Beanspruchung weiter gesteigert werden kann, bis die gesamte Druckzone und die gesamte Zugzone plastifiziert ist. Nach dem Erreichen der maximalen Beanspruchung kann die Krümmung noch weiter gesteigert werden, bis das Material bricht. Bei einer Entlastung und Wiederbelastung folgt die Kurve betreffend Biegesteifigkeit dem elastischen Materialverhalten. Dieses Verhalten kann einfach an einem Stahldraht, wie zum Beispiel einer Büroklammer untersucht werden.

Alle in den Abschnitten 14.1 bis 14.3 aufgeführten Betrachtungen beziehen sich auf den Bereich des *linear elastischen Materialverhaltens* (vgl. Bild 14.5) und stehen im Vordergrund beim *Nachweis der Gebrauchstauglichkeit.* In diesem Abschnitt wird die maximal aufnehmbare Beanspruchung untersucht, welche der maximalen Biegung bei *plastischem Materialverhalten* entspricht. Der so ermittelte Widerstand oder *Biegewiderstand* steht im Vordergrund beim *Nachweis der Tragsicherheit* und oft bei der *Bemessung*. Aus diesem Grund erfolgen die weiteren Betrachtungen auf dem Bemessungsniveau (vgl. Kapitel 5) und die Indizes *d* werden eingeführt.

Es ist darauf zu achten, dass bei sprödem Materialverhalten, z. B. beim Glas, der Biegewiderstand erreicht ist, wenn die Materialfestigkeit am Rand des Balkens erreicht wird. Die zugehörige Spannungsverteilung ist dreieckförmig und der Zustand entspricht dem Übergangspunkt vom linear elastischen zum plastischen Materialverhalten im Bild 14.17. In diesem Kurs wird auf das vertiefte Studium dieses Sachverhaltes verzichtet, weil es der Ansatz mit der konstanten Spannungsintensität erlaubt, die wichtigen Zusammenhänge aufzuzeigen. Vereinfachend wird ein Material mit demselben Widerstand f_d für Zug- wie auch für Druckbeanspruchungen gewählt.

Balken mit Rechteckquerschnitt

Die Lasten, welche der Balken im Bruchzustand zu tragen vermag können wie folgt ermittelt werden:

- Einschreiben eines Fachwerks (oder eines Bogen-Seiltragwerks) in den Balken
- Ermitteln der maximal aufnehmbaren inneren Kräfte in den Gurten, indem die Zug- oder Druckfestigkeit mit der zugehörigen Querschnittsfläche $A = t \cdot h / 2$ multipliziert wird
- Ermittlung der Lasten mit Hilfe eines Cremonaplans.

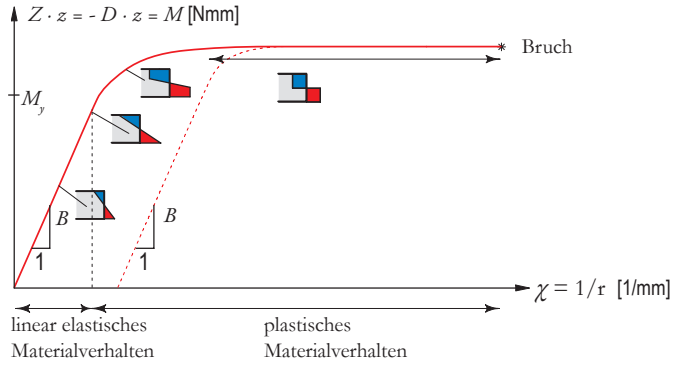


Bild 14.17: Biegung-Krümmung-Beziehung bei plastischem Materialverhalten

Im Bild 14.18 ist der entsprechende Zustand für einen Balken mit Rechteckquerschnitt unter zwei Einzellasten dargestellt.

Die Höhe des Fachwerks bzw. des Bogen-Seiltragwerks muss der wirksamen Höhe *z* des Balkens entsprechen. Bei einem Balken mit rechteckförmigem Querschnitt bedeutet das, dass die wirksame Höhe *z* im Bruchzustand exakt der halben totalen Höhe *h* des Balkens entspricht. Bei kleineren Beanspruchungen benötigen die Druck- und Zugzone eine kleinere Höhe so dass die wirksame Balkenhöhe *z* grösser sein kann.

Gemäss Bild 14.18b betragen die maximalen in der Druck- und in der Zugzone aufnehmbaren inneren Gurtkräfte:

$$Z_d = -D_d = f_d \cdot t \cdot \frac{h}{2} .$$

Die Geometrie des Kräftedreiecks im Bild 14.18c ist affin zum Bogen-Seiltragwerk:

$$\frac{Q_{Rd}}{f_d \cdot t \cdot \frac{h}{2}} = \frac{h}{2 \cdot a} .$$

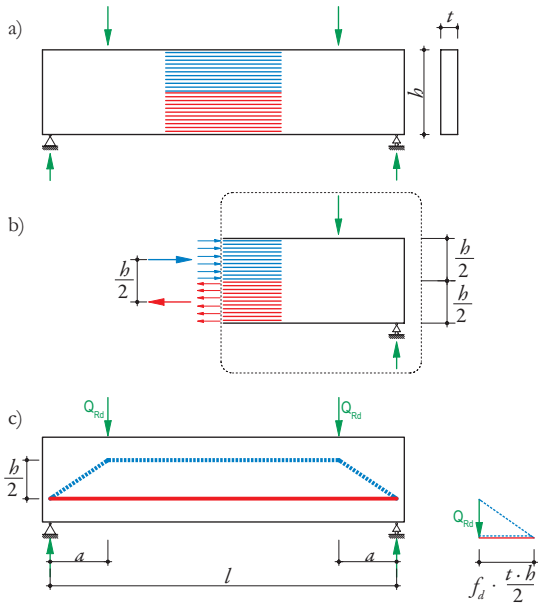


Bild 14.18: Widerstand eines Balkens bei plastischem Materialverhalten und zugehörige äussere Lasten

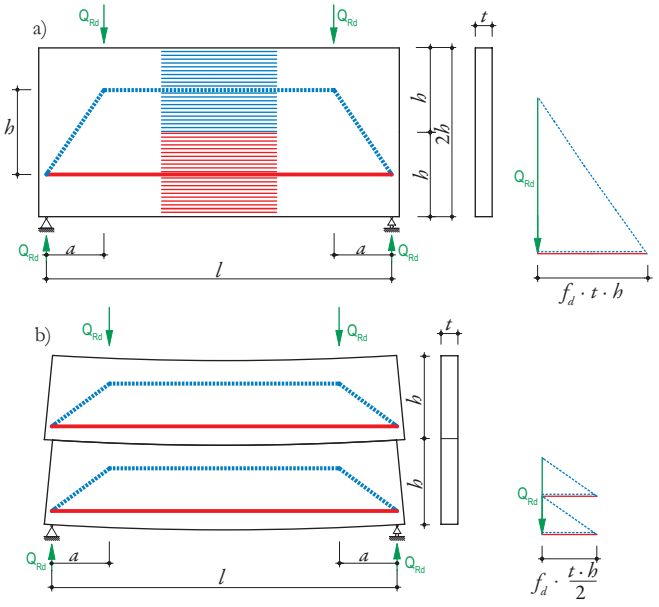


Bild 14.19: Vergleich der Traglast eines Balkens mit verdoppelter Höhe und von zwei übereinander gelegten Balken.

Nach Auflösung nach Q_{Rd} resultiert die Traglast:

$$Q_{Rd} = f_d \cdot t \cdot \frac{h^2}{4 \cdot a} \quad .$$

Aus dieser Formel sind die folgenden Zusammenhänge ersichtlich:

- Die Traglast Q_{Rd} ist linear vom Bemessungswert der Festigkeit des Materials abhängig, d.h. bei *Verdoppelung der Festigkeit* wird auch die *Traglast verdoppelt.*
- Die Traglast Q_{Rd} ist umgekehrt proportional von der Spannweite und weiteren horizontalen Abmessungen des Balkens, wie z. B. dem Abstand *a* der Lasten von den Auflagern abhängig. Die Abmessungen und Widerstände der Druck- und Zugzone bleiben gleich, aber die Neigung der diagonalen Streben wird bei Verdoppelung der Spannweite halbiert, so dass auch der Tragwiderstand sich auf die Hälfte reduziert.
- Die Traglast Q_{Rd} ist linear von der Stärke *t* des Balkens abhängig, d.h. bei *Verdoppelung der Stärke* wird auch die *Traglast verdoppelt.* Dies erstaunt nicht, wirkt doch der Balken mit Stärke $2 \cdot t$ wie zwei nebeneinander gelegte Balken der Stärke *t.*
- Die Traglast Q_{Rd} ist abhängig vom Quadrat der Höhe *h* des Balkens, d.h. bei *Verdoppelung der Höhe* wird die *Traglast vervierfacht.* Dies ist dadurch bedingt, dass sich die zur Verfügung stehenden Flächen für die Zug- und Druckzone verdoppeln, und zusätzlich auch die wirksame Höhe *z* des Balkens und diejenige des eingeschriebenen Fachwerks verdoppeln. Aus dem Cremonaplan geht eindeutig hervor, dass mit doppelten horizontalen Kräften und doppelter Neigung der diagonalen Kräfte eine vierfache Traglast resultiert (Bild 14.19a).

Wenn dagegen zwei identische Balken übereinander gelegt werden, wird die Traglast lediglich verdoppelt (Bild 14.19b). Die Tragsysteme und die zugehörigen Verformungen der beiden Tragwerke sind grundlegend verschieden: wenn die beiden aufeinander gelegten Balken nicht miteinander verbunden sind, stellen sich zwei unabhängige Tragwerke mit je einer Zug- und Druckzone ein. Die Berührungsfläche der beiden Balken trennt die auf Zug beanspruchte Zone des oberen Balkens, welche sich verlängert, von der auf Druck beanspruchten Zone des unteren Balkens, welche sich dagegen verkürzt. Es entsteht somit eine Bewegung zwischen den beiden Balken. Erst wenn diese relative Verschiebung verhindert wird, zum Beispiel indem die beiden Balken miteinander verklebt oder verschweisst werden, entsteht eine Übertragung der inneren Kräfte der Zugzone, welche nun die gesamte Höhe des unteren Balkens beanspruchen kann, zur Druckzone, welche ihrerseits die gesamte Höhe des oberen Balkens einnehmen kann. Nur unter diesen Bedingungen resultiert eine vierfache Traglast gegenüber dem ursprünglichen Balken.

Balken mit Doppel-T-Querschnitt und vertikalem Steg

Im Bild 14.20 sind die inneren Kräfte eines Balkens mit Doppel-T-Querschnitt unter zwei Einzellasten beim Erreichen der Traglast dargestellt. Auch in diesem Fall kann der Tragwiderstand des Balkens aus dem Cremo-

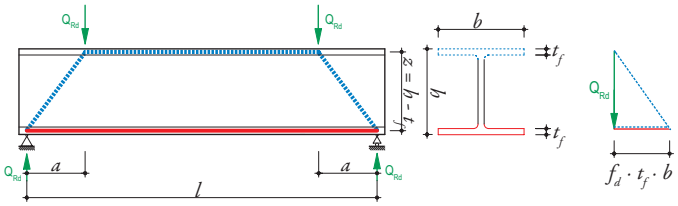


Bild 14.20: Traglast eines Balkens mit Doppel-T-Querschnitt

na-Plan gewonnen werden, unter Berücksichtigung seiner Affinität mit dem Dreieck bestehend aus dem geneigten Stab, der wirksamen Höhe z und dem Abstand a zwischen der Last und dem Auflager. Die Traglast Q_{Rd} steht zum Widerstand der Zug- oder Druckzone $f_d \cdot t_f \cdot b$ wie die wirksame Höhe $h - t_f$ zum Abstand a steht. Aus diesem Zusammenhang resultiert die Traglast:

$$Q_{Rd} = f_d \cdot t_f \cdot b \; \frac{(h - t_f)}{a} \approx f_d \cdot t_f \cdot \; \frac{b \cdot h}{a} \; .$$

Die Traglast Q_{Rd} ist nicht mehr wie beim Rechteckquerschnitt quadratisch, sondern linear von der Höhe h des Querschnitts abhängig.

Nebst der Biegesteifigkeit wird auch die Traglast des Balkens merklich reduziert, und zwar um ca. Faktor 2, wenn der Träger mit vertikal ausgerichteten Flanschen angeordnet wird. Es ist deshalb zweckmässig, Balken mit Doppel-T-Querschnitten mit horizontalen Flanschen anzuordnen, wenn die vorherrschenden Lasten in vertikaler Richtung wirken.

14.5 Effizienz der Tragwerke

Die Betrachtungen in den Abschnitten 14.2 bis 14.4 bestätigen, was bereits bei den Seilen und bei den Bögen erkannt wurde: ein Tragwerk ist dann effizient in Bezug auf Materialverbrauch, wenn seine *Schlankheit* (*Verhältnis der Spannweite l zur Höhe h*) nicht zu gross ist. Es ist also besser, das Material in der Höhe als in der Breite anzuordnen.

Die *Effizienz eines Querschnitts* kann demnach definiert werden als das Verhältnis der wirksamen Höhe zur tatsächlichen Höhe. Je mehr Material in der Nähe des oberen und des unteren Querschnittsrandes angeordnet ist, umso grösser wird die Effizienz des Querschnitts unter Biegebeanspruchung sein. Im Bild 14.21 sind einige Querschnitte mit von links nach rechts wachsender Effizienz dargestellt, wobei die Sterne den Schwerpunkt der Druck- und der Zugzone darstellen.

Die *Form* und vor allem die *Schlankheit* des Tragwerks haben einen entscheidenden Einfluss auf die Beanspruchung des Materials und somit auch auf die *erforderliche Materialmenge* zur Aufnahme der Kräfte. Im Bild 14.22 ist das erforderliche Material in Funktion der Schlankheit l / h aufgetragen. Alle bis jetzt behandelten Tragwerksarten sind dargestellt: Seile und Bögen, Bogen-Seiltragwerke und Fachwerke konstanter Höhe mit N-förmigen, V-förmigen, X-förmigen und K-förmigen Diagonalen und Balken. Es werden nur Tagwerke, welche an ihren beiden Enden aufgelagert und mit einer konzentrierten äusseren Last in Feldmitte belastet sind berücksichtigt. Zudem wurde vorausgesetzt, dass das Material die gleiche Festigkeit auf Zug als auch auf Druck besitzt.

Aus dem Diagramm ist Folgendes ersichtlich:

Bei allen Tragwerken führt, ab einer gewissen Grenze *(l / h* circa 3*)*, die Vergrösserung der Schlankheit zu einer bedeutenden Zunahme des Materialverbrauchs und das Eigengewicht des Tragwerks wird grösser.

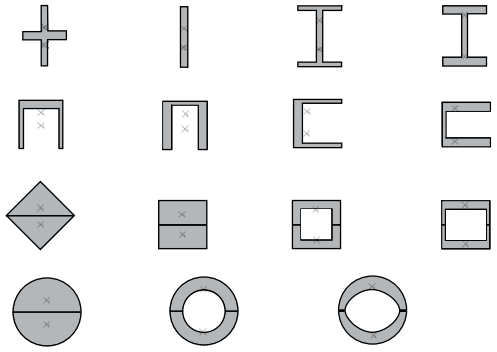


Bild 14.21: Vergleich von Querschnitten (unter Vertikallasten) mit von links nach rechts steigender Effizienz bei Biegebeanspruchung

Die Seile und die Bögen benötigen die gleiche Materialmenge. Dies ist eine Konsequenz der Analogie dieser beiden Tragwerksarten. In Wirklichkeit benötigen die Bögen eine grössere Materialmenge, wenn das Problem der Instabilität berücksichtigt wird.

Das Bogen-Seiltragwerk, welches auch als vereinfachtes Fachwerk aufgefasst werden kann, benötigt fast die doppelte Materialmenge gegenüber dem Bogen oder dem Seil. Dies ist bedingt durch die Tatsache, dass beim Seil und beim Bogen die horizontale Kraft von den Auflagern aufgenommen wird, während bei den Bogen-Seiltragwerken die Horizontalkraft von einem zusätzlichen Tragwerkselement aufgenommen werden muss, welches ebenfalls Material benötigt.

Für Schlankheiten l / f grösser als 5 sind die Fachwerke mit gemäss innerem Kräfteverlauf abgestuften Querschnittsflächen der Gurte wesentlich effizienter als die Bogen-Seiltragwerke (Bei Fachwerken ohne Diagonalen, deren Verlauf demjenigen des Seilpolygons folgt).

Fachwerke mit konstanter Höhe und konstanter Querschnittsfläche der Gurte (überdimensionierte Stäbe) sind weniger effizient. Sie benötigen in der Tat noch mehr Material als die Bogen-Seiltragwerke: für die Gur-

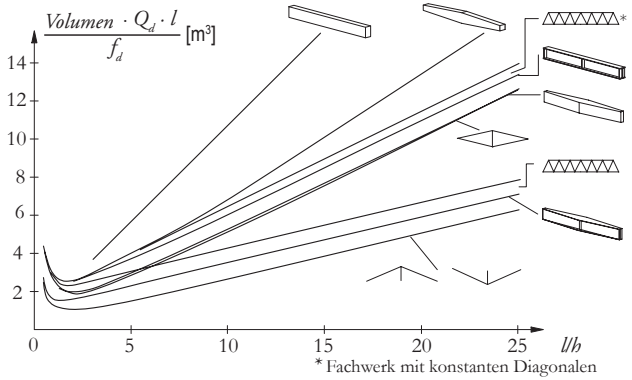


Bild 14.22: Erforderliche Materialmenge in Funktion der Schlankheit l / h

te wird eine ähnliche Materialmenge benötigt wie für den Bogen und das Seil. Während die Länge und die Beanspruchung beider Tragwerke vergleichbar ist, wird beim Fachwerk jedoch noch zusätzliches Material für die Diagonalen benötigt.

Auch die Anordnung der Diagonalen hat einen Einfluss auf den Materialverbrauch, dieser ist jedoch geringer als derjenige der anderen Faktoren. Bei den Fachwerken mit variabler Querschnittsfläche der Gurte sind die X-förmigen, die V-förmigen, die K-förmigen Diagonalen am effizientesten, während Tragwerke mit N-förmigen und K-förmigen Diagonalen mehr Material benötigen. Für die Fachwerke mit überdimensionierten Gurten und konstanter Querschnittsfläche ist der Sachverhalt analog: die X-förmigen und die V-förmigen Diagonalen sind effizienter, die N-förmigen und die K-förmigen Diagonalen sind weniger effizient.

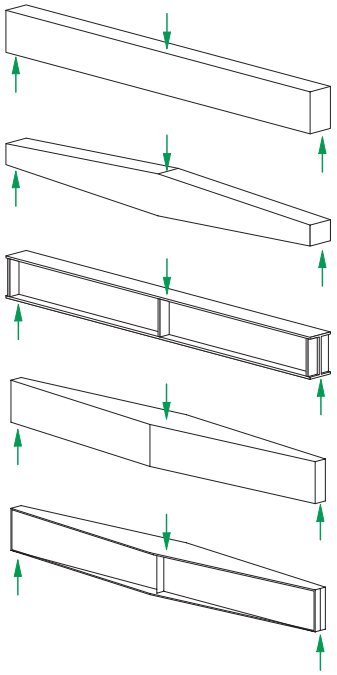


Bild 14.23: Möglichkeiten zur Ausbildung des Querschnitts bei in Feldmitte belasteten Balken.

Balken benötigen am meisten Material. Eine Veränderung des Querschnitts über die Balkenlänge kann aber zu einer beträchtlichen Materialersparnis führen. Doch diese Ersparnis führt wegen den Erschwernissen bei der Ausführung meist nicht zu wirtschaftlichen Vorteilen. Es ist beispielsweise extrem schwierig gewalzte Querschnitte und praktisch unmöglich gezogene Querschnitte zu variieren, ausser wenn das überflüssige Material während der Produktion entfernt wird.

Im Bild 14.23 sind einige Möglichkeiten von Balkenformen unter Eigenlast dargestellt, mit von oben nach unten zunehmender Effizienz (wie gemäss Bild 14.22). Bei den Doppel-T-Trägern besteht die Variation des Querschnitts aus der Anpassung der Breite oder der Stärke der Flansche an ihre Beanspruchung. Bei einer in Feldmitte wirkenden konzentrierten Last betragen diese Abmessungen bei den Auflagern null und nehmen linear bis zu ihrem Maximum in Feldmitte zu. Bei diesen Balken sind vertikal angeordnete Aussteifungselemente bei den Auflagern und bei der Krafteinleitung in Feldmitte notwendig, um die konzentrierten Kräfte aufzunehmen und in den Steg weiterzuleiten.

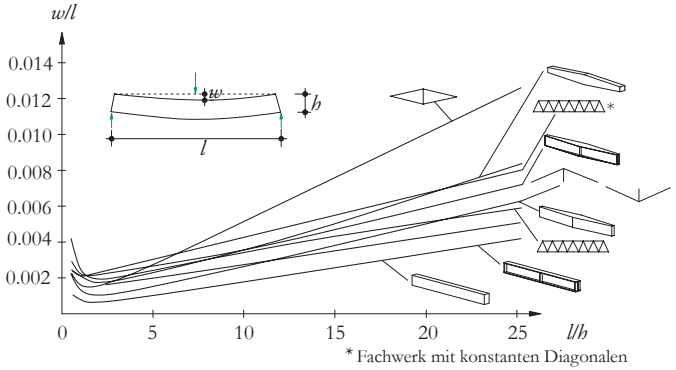


Bild 14.24: Durchbiegungen in Feldmitte infolge einer konzentrierten mittigen Last in Funktion der Schlankheit l / h ($\varepsilon_{max.} = 0.001$)

Auch bei den Balken mit Rechteckquerschnitt ist es möglich die Breite oder die Höhe zu verändern. Es ist allerdings wichtig, dass ein Balken eine gewisse Höhe bei den Auflagern aufweist, um die inneren diagonalen Kräfte aufnehmen zu können.

Ein Tragwerk muss nicht nur den äusseren Lasten widerstehen (Kriterium der Tragsicherheit für die Bemessung), sondern auch die Verformungen müssen in gewissen Grenzen bleiben (Kriterium der Gebrauchstauglichkeit). Die Effizienz eines Tragwerks hängt somit auch von seiner Steifigkeit ab.

Im Bild 14.24 sind die maximalen Verformungen der untersuchten Tragwerke wiederum in Funktion ihrer Schlankheit dargestellt. Ausgegangen wurde von einer Last, welche eine Dehnung $\varepsilon = 0.001$ im am stärksten beanspruchten Stab verursacht (d.h. eine Spannung $\sigma = 210$ N/mm^2 bei einem Elastizitätsmodul des Stahls von 210'000 N/mm^2). Wegen der Proportionalität kann das Diagramm auch für andere Beanspruchungen und andere Elastizitätsmodule verwendet werden.

Auch in diesem Fall bewirkt eine *Zunahme der Schlankheit* im Allgemeinen eine *starke Zunahme der Verformungen*. Die steifsten Tragwerke sind die Fachwerke

Material	Tragwerk	wirtschaftliche Schlankheit *l/h* für einfache Balken *
Stahl	Vierendeelträger Fachwerkträger Raumfachwerk Balken	7 – 10 10 - 15 12 - 18 15 - 20
Stahlbeton	Balken Platten	12 – 18 20 – 25
Spannbeton	Balken Platten	18 – 25 28 – 35
Holz	Balken	15 - 20

* bei Konsolen entspricht *l* der zweifachen Spannweite der Konsole, bei Balken mit Konsolen bzw. Durchlaufträgern entspricht *l* dem Abstand der beiden zwischen den Auflagern liegenden Gelenken

Tabelle 14.1: Richtwerte für die Schlankheit von Tragwerken

mit konstanter Höhe und mit Gurten konstanter Querschnittsfläche. Dies erklärt sich dadurch, dass diese Tragwerke überdimensioniert sind, so dass viele Stäbe nicht vollständig ausgenützt sind und ihre Verformung den angenommenen Wert nur in den Bereichen maximaler Beanspruchung erreicht.

Die Tragwerke ohne überflüssiges Material mit minimaler Verformung sind die Bögen und die Seile. Bei den Fachwerken mit konstanter Höhe und mit Gurten mit variablen Querschnitten sind die Verformungen leicht grösser. Was die Konfiguration der Diagonalen und ihre Neigung anbelangt, gelten die gleichen Zusammenhänge wie bei den Materialmengen. Die Bogen-Seiltragwerke weisen deutlich grössere Verformungen auf.

Die Balken mit konstantem Querschnitt, bei denen ein beträchtlicher Anteil des Materials überflüssig ist, weisen kleinere Durchbiegungen auf. Dieses Material, welches in Bezug auf den Tragwiderstand nicht notwendig wäre, hat somit einen positiven Einfluss auf die Verformungen. Es ist jedoch zu bemerken, dass eine Verschiebung dieses Materials in Richtung der stärker beanspruchten Bereiche die Effizienz der Balken weiter steigern könnte.

Aus den Überlegungen dieses Kapitels ist klar geworden, dass die Abmessungen der Tragwerke nicht beliebig gewählt werden können, sondern dass es zweckmässig ist, gewisse Schlankheitskriterien beim Tragwerksentwurf einzuhalten. Einerseits führen sehr grosse Schlankheiten zu extrem grossen Kräften in den Gurten, welche nicht mehr vom Material aufgenommen werden können, und andererseits werden in diesen Fällen die Verformungen so gross, dass Gebrauchstauglichkeitsprobleme auftreten, sei es infolge der zu grossen Durchbiegungen oder infolge unzulässiger Schwingungen.

In der Tabelle 14.1 sind vernünftige Schlankheiten für ebene und räumliche Fachwerk- und Balkentragwerke angegeben. Diese sind als Richtgrössen bei mittleren Spannweiten zu verstehen, welche sicherstellen, dass die Kriterien der Tragsicherheit und der Gebrauchstauglichkeit in der Regel eingehalten werden können. Grössere Schlankheiten sind möglich wenn die Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit gering sind, führen aber zu unwirtschaftlichen Tragwerken.

15 Stützen

Stützen sind durch Druckkräfte beanspruchte Tragelemente. Die Wirkungslinie der inneren Kräfte liegt nahe an der Stützenachse oder trifft mit dieser zusammen. In diesem Kapitel wird vereinfachend angenommen, dass die äusseren Kräfte nur an den Stützenenden wirken. Kräfte, die über die Höhe der Stütze angreifen, wie zum Beispiel Windkräfte, werden nicht berücksichtigt.

Die Stützen weisen an ihren beiden Enden Auflager auf. Falls oben und unten gelenkige Auflager angeordnet sind, trifft die Wirkungslinie der inneren Druckkräfte mit der Stützenachse zusammen und die Stütze ist *zentrisch beansprucht* (Bild 15.1a). Falls die Stütze dagegen ein oder zwei eingespannte Auflager aufweist, kann die Wirkungslinie der inneren Kräfte je nach Belastung der Stütze von deren Achse abweichen (Bild 15.1b). Die entsprechende Situation wird als *exzentrische Beanspruchung* bezeichnet.

Im Fall einer exzentrischen Belastung entsteht zusätzlich zur inneren Druckkraft *Biegung* in der Stütze. Diese wird, je nach äusseren Lasten, entweder nur durch eine innere Druckkraft aufgenommen (Bild 15.2a), wie beim massiven Bogen gemäss Bild 6.17, oder es werden Gurt- und Diagonalenkräfte erzeugt (Bild 15.2b).

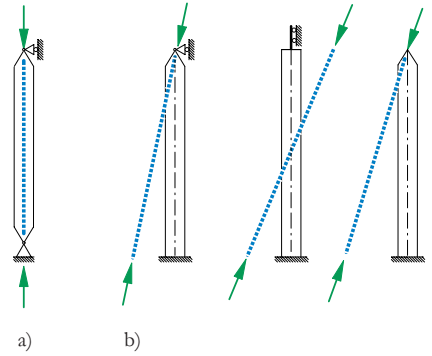


Bild 15.1: Auflagersituationen und innere Kräfte in Stützen unter einer zentrischen (a) und exzentrischen (b) Beanspruchung

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass bei Stützen die Materialfestigkeit häufig nicht ausgenützt werden kann, weil die Stützen vor dem Erreichen der entsprechenden Traglast seitlich ausweichen können. Dieses Phänomen ist verwandt mit dem Stabilitätsversagen der schlanken Bögen. Hier wird vom *seitlichen Ausknicken* oder einfach vom *Knicken* der Stützen gesprochen. Das Kapitel widmet sich somit dem so genannten *Stabilitätsversagen schlanker Druckelemente*, welches eigentlich als *Instabilitätsproblem* zu bezeichnen wäre.

15.1 Das Wesen des Instabilitätsproblems

Im Zuge der Tragwerksplanung ist bei der Bemessung eine Differenzierung zwischen Zug- und Druckstäben notwendig. Die Unterscheidung dieser beiden inneren Beanspruchungsarten ist aus zwei Gründen wichtig.

Einerseits sind Materialien wie Beton, Stein und Mauerwerk sehr widerstandsfähig auf Druck, während sie eine begrenzte Zugfestigkeit aufweisen. Ausserdem ist die Übertragung einer inneren Druckkraft von einem Element auf ein anderes recht einfach, da oft ein einfacher Kontakt ausreichend ist. Andererseits ist, wie

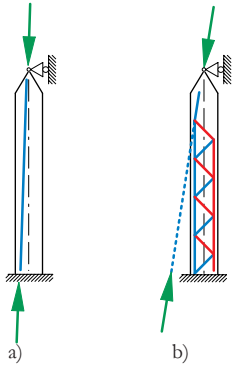


Bild 15.2: Stützen mit exzentrischer Druckbeanspruchung

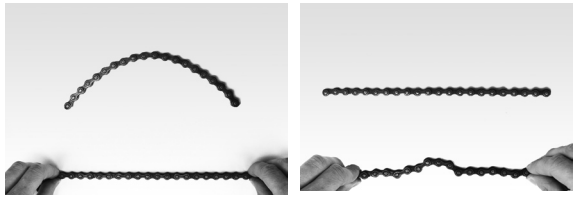


Bild 15.3: Kette unter Zug- und unter Druckbeanspruchung

bereits mehrmals unterstrichen wurde, die Aufnahme von Druckbeanspruchungen nicht immer problemlos. Eine Zugkraft in einem Tragelement verursacht Verformungen und Verschiebungen, welche dem Tragelement dazu verhelfen, sich der Wirkungslinie der inneren Kräfte zu nähern. Dagegen neigt dasselbe Tragelement unter Druck dazu, sich von der idealen Lage zu entfernen, sodass die inneren Kräfte anwachsen. Dies gilt sowohl für eine durch Gelenke verbundene Reihe von Stäben als auch für ein monolithisches Tragwerk.

Im Fall der Zugbeanspruchung liegt ein labiles Tragwerk vor. Im Bild 15.3a ist ein solches Tragwerk dargestellt. Die Stäbe bilden einen Mechanismus und verschieben sich ungeachtet der anfänglichen Form in Richtung der Wirkungslinie der äusseren Lasten, bis sie mit dieser übereinstimmen. Die labile Struktur ist dann in der Lage, die angreifenden Lasten aufzunehmen, unter der Bedingung, dass der Widerstand des Materials ausreichend ist.

Ganz anders verhält sich das Tragwerk unter Druck: eine sehr kleine Abweichung der Wirkungslinie von der Tragwerksachse ist ausreichend, um das Tragwerk aus der stabilen Gleichgewichtlage zu bringen. Ein Tragwerk dieser Art ist in der Tat instabil. Dies ist intuitiv leicht verständlich, und das Phänomen ist dasselbe wie beim Bogen und beim Seil.

Im Falle eines biegesteifen, nicht labilen Tragwerks, sind

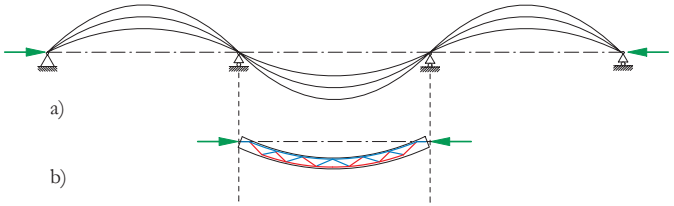


Bild 15.4: Knicklinie einer mehrfeldrigen Stütze (a); innere Kräfte in der Stütze (b)

die Auswirkungen ähnlich. Drückt man auf das Stabende eines dünnen Druckstabs, so entsteht im mittleren Teil Biegung infolge der nie ganz auszuschliessenden Abweichung der Wirkungslinie der Druckkraft von der Stabachse. Die Innenseite wird dann stärker auf Druck beansprucht als die Aussenseite. Der innere Teil verkürzt sich stärker, sodass eine Verformung auftritt, welche sehr ähnlich ist wie diejenige der im Bild 15.3b dargestellten Kette. Diese Verformungen führen zu einer Zunahme der Krümmung des Stabes, sodass er sich weiter von der idealen, geraden Lage entfernt. Das sich Entfernen der Achse des verformten Tragelementes von der Wirkungslinie der inneren Kraft bewirkt infolge der Krümmung, eine weitere Erhöhung der Druckbeanspruchung am inneren Rand. Die Erhöhung der Beanspruchung verformt weiterhin den Stab, indem er sich immer weiter von der Wirkungslinie der inneren Kraft entfernt und so weiter. Es handelt sich hierbei um einen regelrechten Teufelskreis, welcher zur Instabilität des Stabes führt.

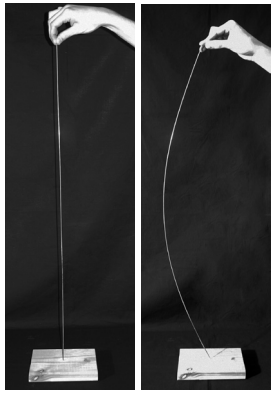


Bild 15.5: Schlanke Stahlstütze unter Zug- und Druckbelastung

Bei einer bestimmten kritischen Last D_{cr}, welche häufig als *Knicklast* bezeichnet wird, ist demzufolge ein alternativer Gleichgewichtszustand zur zentrischen Beanspruchung möglich. Bei diesem Gleichgewichtszustand wird die gebogene Stütze (Bild 15.4a) zusätzlich auf Biegung beansprucht. Im Bild 15.4b wird die Verteilung der inneren Kräfte bei grossen Verformungen dargestellt. Leonhard Euler (1707-1783) hat diesen Gleichgewichtszustand als Erster beschrieben und herausgefunden, dass die Biegelinie der ausgeknickten, mit einer Druckkraft beanspruchten Stütze mit linear elastischem Materialverhalten die Form einer Sinus-Linie annimmt.

15.2 Der Widerstand einer Stütze unter Druckbelastung

Der Widerstand eines gedrückten Tragelements ist aus den im Abschnitt 15.1 beschriebenen Gründen meist niedriger als das Produkt der Materialfestigkeit mit der Querschnittsfläche. Um dieses Phänomen quantitativ zu beschreiben, wird die im Bild 15.5 dargestellte schlanke Stütze aus einem dünnen Stahlstab untersucht. Der Durchmesser der Versuchsstütze beträgt $\varnothing = 4$ mm, die Länge $l = 800$ mm, die Querschnittsfläche $A = 12.6$ mm^2, die Fliessgrenze $f_y = 235$ N/mm^2 und der Elastizitätsmodul $E = 210'000$ N/mm^2. Der Zugwiderstand Z_R der Stütze beträgt

$$Z_R = f_y \cdot A = 235 \text{ N/mm}^2 \cdot 12.6 \text{ mm}^2 = 2'960 \text{ N}.$$

Die Traglast unter Zugbeanspruchung der Stütze entspricht somit dem Gewicht von ca. 4 Personen. Auf Druck ist die Traglast dagegen viel geringer. Der als kritische Last D_{cr} bezeichnete Druckwiderstand der Stütze beträgt in diesem Beispiel nur

$$-D_{cr} \cong 40 \text{ N} << Z_R = 2'960 \text{ N}.$$

also nur rund 1.4% der Traglast unter Zugbeanspruchung, obschon die Druckfestigkeit des Materials identisch ist mit seiner Zugfestigkeit.

Die Tatsache, dass eine Stütze unter Druckbeanspruchung einen kleineren Widerstand aufweist als unter Zugbeanspruchung spiegelt sich in der Dimension der Tragelemente wieder. Obwohl die Grössenordnung der

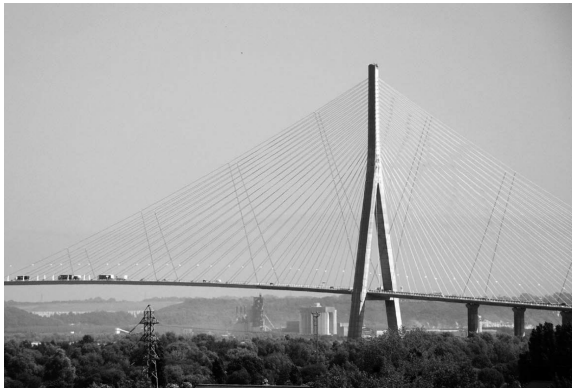


Bild 15.6: Port de Normandie, 1995, Arch.: F. Doyelle, C. Cavique, Ing.: M. Virlogeux



Bild 15.7: Verteilzentrum Renault, Swindom, 1982, Arch.: Norman Forster, Ing.: Ove Arup

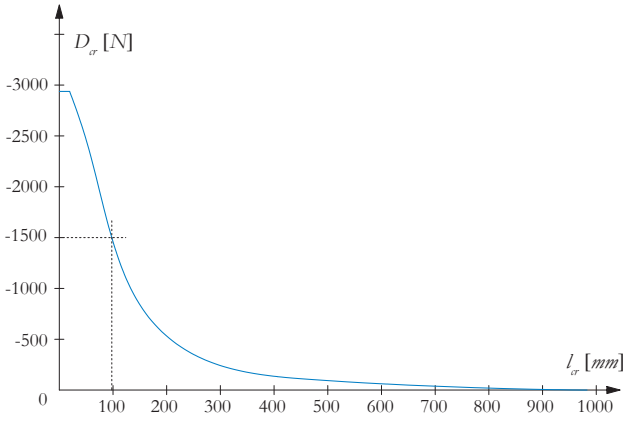


Bild 15.8: Einfluss der Stützenlänge auf den Druckwiderstand (Kritische Last)

Belastungen vergleichbar ist, sind die Zugseile dünn, während die gedrückten Tragelemente wesentlich massiger sind, um eine ausreichende Stabilität zu gewährleisten. Deutlich sichtbar wird es an der Schrägseilbrücke in der Normandie im Bild 15.6 oder dem Renault Verteilzentrum vom Arch. Norman Foster in Swindom im Bild 15.7.

Um das Problem der Instabilität der Stützen in den Griff zu bekommen, ist dafür zu sorgen, dass diese unter Biegung mindestens so steif sind, dass sie sich unter einer in Gedanken aufgebrachten horizontalen Last nicht zu sehr in Querrichtung verformen können.

Wie im Kapitel 14 gezeigt wurde, beeinflussen neben der äusseren Belastung vor allem folgende Parameter die Verformung des Tragwerks:

- die *Spannweite l* des Tragelementes, d.h. die Länge der Stütze
- die *Auflagersituation*, also wie die Stütze an ihren Enden aufgelagert ist und
- die *Biegesteifigkeit B* der Stütze.

Die Biegesteifigkeit ihrerseits ist abhängig ist vom *Elatizitätsmodul E* des Materials, von den *Abmessungen des Querschnitts* und von der *Form des Querschnitts*.

15.3 Einfluss der Länge der Stütze auf die kritische Last

Die Biegesteifigkeit eines Balkens nimmt mit zunehmender Spannweite gemäss Kapitel 14 überproportional ab. Entsprechend neigen lange Stützen viel eher zum Auszuknicken als kurze Stützen mit dem gleichen Querschnitt.

Im Bild 15.8 ist die kritische Last der im vorherigen Abschnitt behandelten Stahlstütze in Funktion ihrer Länge dargestellt. *Die kritische Last* D_{cr} einer Stütze mit einer Länge von 800 mm beträgt nur 40 N und *nimmt mit zunehmender Länge* weiter *ab*. Die Darstellung zeigt, dass die Festigkeit des Materials nur vollständig ausgenützt werden kann, wenn die Stützenlänge kleiner als ungefähr 20 mm ist. Um wenigstens die Hälfte der Materialfestigkeit ausnützen zu können, darf die Länge 100 mm nicht überschreiten.

Im Allgemeinen kann bei einer Stahlstütze mit vollem Kreisquerschnitt die Materialfestigkeit vollständig ausgenützt werden, wenn die Höhe weniger als fünfmal dem Durchmesser entspricht. Zudem darf dieses Verhältnis den Wert 25 nicht überschreiten, wenn das Material wenigstens zu 50% ausgenützt werden soll.

15.4 Einfluss der Auflagerbedingungen der Stütze auf die kritische Last

Die im Bild 15.8 dargestellte Beziehung zwischen der Schlankheit der Stütze und dem Grad der Materialausnutzung ist für das untersuchte Tragwerk unter der Annahme gültig, dass die Enden gehalten, aber frei verdrehbar sind. Die Länge der Stütze l entspricht dann dem Abstand zwischen zwei Wendepunkten der Sinus-Welle, der sogenannten kritischen Länge l_{cr}, welche von der Druckkraft D abhängt.

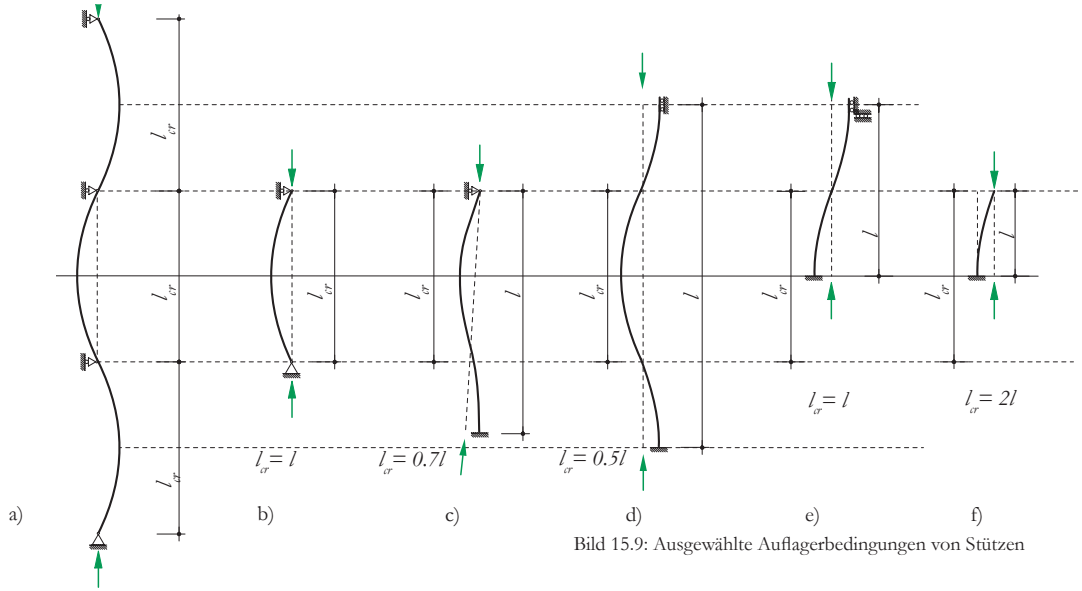


Bild 15.9: Ausgewählte Auflagerbedingungen von Stützen

Diese Erkenntnisse können einfach gemäss Bild 15.9 auf Stützen mit beliebigen Auflagerbedingungen erweitert werden, indem die tatsächliche Stütze in die Sinus-Welle gemäss Bild 15.4 eingepasst wird und die Länge l der Stütze mit der kritischen Länge l_{cr}, in Bezug gesetzt wird.

Eine *Einspannung eines Endes der Stütze* hat bei konstanter Länge der Stütze eine *Erhöhung der kritischen Last* zur Folge. Für die Versuchsstütze gemäss Bild 15.5 mit einer Länge von 800 mm Höhe verdoppelt sich die kritische Last nahezu von 40 auf 77 N. Die Begründung liegt darin, dass die Biegesteifigkeit der Stütze gegenüber der Stütze mit frei drehbaren Enden angestiegen

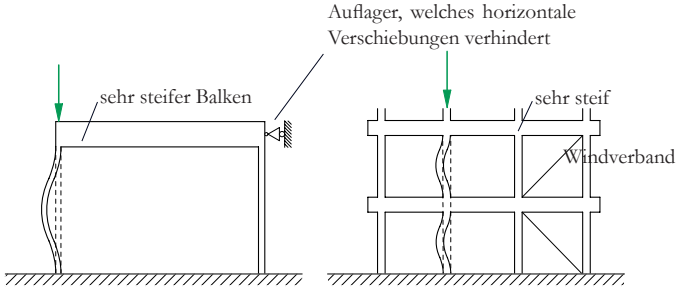


Bild 15.10a: Beispiel für eine schlanke Stütze mit nicht verschieblichem Stützenkopf.



Bild 15.10b: Carré d'art, Nimes, 1993, Arch.: Norman Foster, Ing.: Ove Arup & OTH Méditerranée

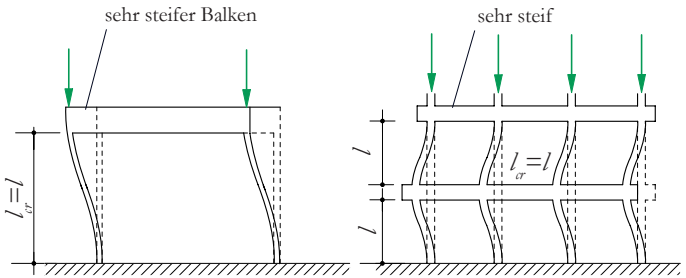


Bild 15.11: Beispiele von unten eingespannten, aber in horizontaler Richtung frei verschieblichen Stützen

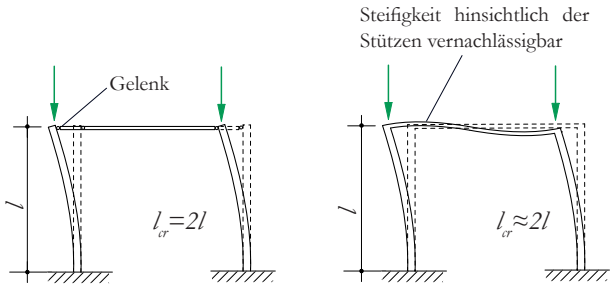


Bild 15.12: Beispiele mit unten eingespannten und oben vollkommen freien Stützen

ist. Bei der selben kritischen Last weist die Stütze mit frei drehbaren Enden (Bild 15.9b) im Vergleich zu der neuen Stütze (Bild 15.9c) eine auf 70% reduzierte Länge auf. Eine gelenkig aufgelagerte Stütze gemäss Bild 15.5 mit einer reduzierten Länge $l = l_{cr}$ von 560 mm weist tatsächlich eine kritische Last von 77 N auf.

Die Steifigkeit und somit auch die *kritische Last steigen weiter an*, wenn *beide Enden* einer Stütze *eingespannt* werden (Bild 15.9d). Natürlich muss das obere Ende, obwohl es eingespannt ist, sich in vertikaler Richtung frei verschieben können (Bild 10.10e), da sonst die Last vom oberen Auflager aufgenommen würde. Die 800 mm lange, oben und unten eingespannte Stütze, weist eine kritische Last von 147 N auf. Um denselben Tragwiderstand einer an den Enden frei drehbaren Stütze zu erhalten, muss die Länge der Stütze auf 400 mm reduziert werden. Mit anderen Worten entspricht die kritische Länge derjenigen einer Stütze, welche an beiden Enden eingespannt ist, 50% ihrer effektiven Länge.

Die Stützen des Carré d'art in Nimes, welche offensichtlich eine sehr grosse Schlankheit aufweisen, sind in sehr steifen, kräftigen Balken eingespannt (Bild 15.10a und 15.10b). Die horizontale Verschiebung dieser Balken, und somit auch der Stützenköpfe, wird durch horizontale Windverbände verhindert.

Fehlen dagegen die Windverbände, so ist der Rahmen weniger steif, da er sich in *horizontaler Richtung bewegen* kann (Bild 15.11). Im Kapitel 10 sind die Eigenschaften dieses Auflagers dargestellt worden (Bild 10.10f). Die Versagensart des Knickens wechselt radikal: die maximale Verschiebung tritt am oberen Ende auf. *Die Stütze* weist bei gleicher Länge die *identische kritische Last* von 40 N auf *wie die an den Enden frei drehbare Stütze* (Bild 15.9e).

Das bedeutet, dass bei Stützen eines seitlich nicht gehaltenen Rahmens die kritische Länge exakt der Stützenlänge entspricht. Die Windverbände, welche als Tragelemente zur Aufnahme der horizontalen Einwirkungen definiert sind, haben somit noch eine andere sehr wichtige Funktion: nämlich die kritische Last der Stützen und somit ihren Widerstand gegenüber den vertikalen Lasten zu erhöhen.

Wenn die Windverbände weggelassen werden und *die Stützen an ihrem oberen Ende* frei drehbar ausgebildet sind, d.h. der Stützenkopf sich frei in horizontaler Richtung bewegen kann (Bild 15.12), resultiert eine *starke Reduzierung der kritischen Last*. Um dieselbe Reduzierung zu erhalten, müsste die Länge einer frei verschieblichen, aber horizontal gehaltenen Stütze von den anfangs 800 mm auf 1600 mm erhöht werden. Dies bedeutet, dass die Knicklänge zweimal so gross wie die

Stützenlänge ist (Bild 15.9f).

Falls bei einem Rahmen *die Stützen über mehrere Stockwerke durchlaufenden*, und auf der Höhe der horizontalen Balken *frei drehbar*, aber in horizontaler Richtung unverschieblich gelagert sind, entsprechen die Verformungen beim Versagen der Stützen exakt der Sinuswelle gemäss Bild 15.9a. Die *kritische Last* ist somit *identisch* mit jener der Stützen, *welche bei jedem Stockwerk unterbrochen* und *gelenkig angeschlossen* sind. Die Stützen des Centre Georges Pompidou in Paris sind ein entsprechendes Beispiel. In jedem Stockwerk werden die Stützen durch ein System von Windverbänden gehalten, sie können sich aber frei verdrehen.

Aus diesen Betrachtungen wird ersichtlich, dass die *allgemeine Untersuchung* von Stützen mit unterschiedlichen Auflagerbedingungen auf einfache Weise auf diejenige einer *an beiden Enden gelenkig gelagerte Stütze zurückgeführt* werden kann, indem eine *kritische Länge*

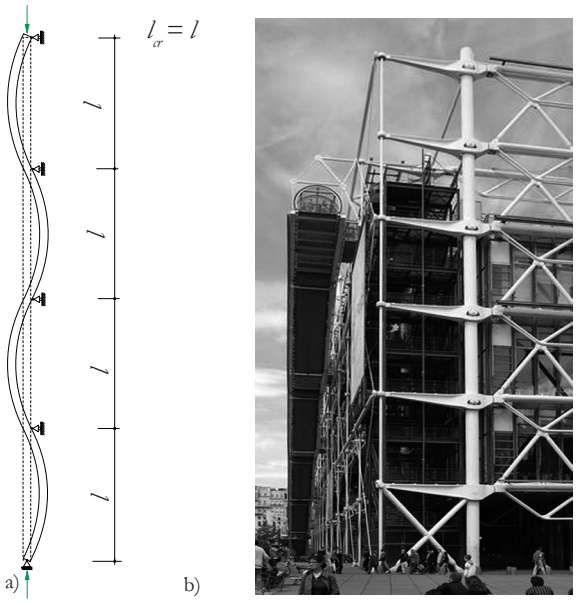


Bild 15.13: Knicklinie einer kontinuierlichen, mehrmals gelenkig gelagerten Stütze (a); Stützen des Centre Georges Pompidou, Paris (b)

l_{cr} definiert wird, welche der Höhe einer ideellen Stütze entspricht, die an den Enden gelenkig gelagert ist und dieselbe kritische Last aufweist.

Generell kann festgestellt werden, dass durch *Verstärkung der Auflagerbedingungen* einer Stütze infolge Begrenzung der horizontalen Verschiebungen oder Erschweren der Stützenkopfverdrehung, die kritische Länge reduziert und somit die *kritische Last erhöht* wird. Bild 15.14 zeigt die kritische Last des Stahlstabs gemäss Bild 15.5 in Funktion der Stützenlänge für verschiedene Auflagerbedingungen mit den entsprechenden kritischen Längen.

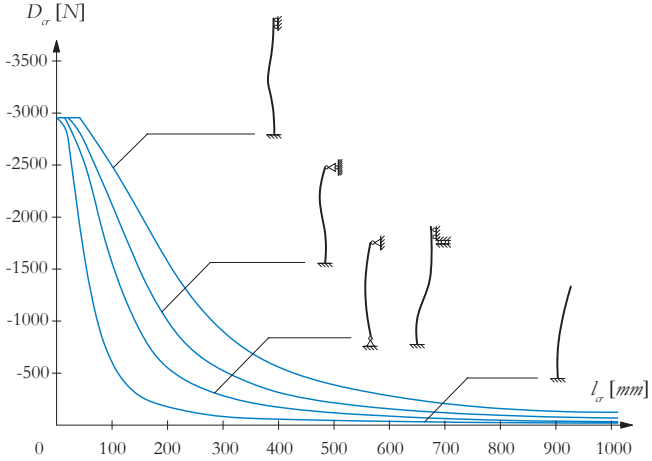


Bild 15.14: Kritische Last in Funktion der Stützenlänge (Stahl S235, Durchmesser 4 mm) für verschiedene Auflagerbedingungen

15.5 Einfluss der Materialsteifigkeit der Stütze auf die kritische Last

Eine Stütze aus einem weichen Material mit einem kleinen Elastizitätsmodul neigt viel stärker dazu, unter einer Druckkraft seitlich auszuweichen als eine Stütze aus einem steifen Material. So weist zum Beispiel eine Stütze aus Aluminium eine kleinere kritische Last auf als die gleiche Stütze aus Stahl, weil der Elastizitätsmodul des Aluminiums nur ca. ein 1/3 desjenigen des Stahls beträgt. Im Bild 15.15 ist die kritische Last eines runden Stabs mit 4 mm Durchmesser aus Stahl einem Stab aus Aluminium gegenübergestellt. Ein Vergleich der kritischen Lasten von identischen Stützen aus unterschiedlichen Materialien ergibt, dass insbesondere der *Elastizitätsmodul die kritische Last von schlanken Stützen beeinflusst*. Die Festigkeit des Materials hat dagegen einen unbedeutenden Einfluss und ist nur für gedrungene Stützen massgebend.

Diese Feststellung hat eine wichtige praktische Konsequenz, denn die kritische Last von schlanken Stützen kann nicht durch die Wahl einer Stahlqualität höherer Materialfestigkeit gesteigert werden. Aus dem Diagramm im Bild 15.15 wird ersichtlich wie die kritischen Lasten dreier Stäbe mit 4 mm Durchmesser aus Stahl S235, S355 und S460 in Funktion der Schlankheit der Stäbe stehen. Andere Baumaterialien wie beispielsweise Beton, Mauerwerk oder Holz haben einen deutlich geringeren Elastizitätsmodul als Stahl. Dies wird allerdings durch die Tatsache kompensiert, dass die Querschnitte im Allgemeinen massiver sind, sodass die Stabilität, obschon sie nicht zu vernachlässigen ist, oft ein weniger massgebendes Kriterium bei der Bemessung ist, als dies bei Tragelementen aus Stahl der Fall ist.

15.6 Einfluss der Querschnittabmessungen der Stütze auf die kritische Last

Die Querschnittabmessungen sind grundlegende Parameter, welche die kritische Last einer Stütze ebenfalls beeinflussen. Bei *zunehmenden Abmessungen* wird nicht nur die Fläche, sondern auch die Biegesteifigkeit der Stütze und somit ihre *kritische Last vergrössert*. Es sind somit zwei Effekte vorhanden: Eine grössere Quer-

schnittfläche und eine niedrigere Schlankheit, sodass das Material besser ausgenützt werden kann. Um diese Wirkung zu quantifizieren, wird nochmals das Beispiel des Stahlstabs mit 4 mm Durchmesser und einer Knicklänge von 800 mm herangezogen. Wie einleitend im Abschnitt 15.3 gezeigt wurde, beträgt die kritische Last rund 40 N und die Ausnützung des Materials beschränkt sich auf lediglich 1.4%.

Wird der Durchmesser verdoppelt, was einer Vervierfachung der Querschnittfläche der Stütze gleichkommt, so steigt bei konstanter Stützenlänge die kritische Last auf 585 N, was einer 15-fachen Steigerung gleichkommt. Der Ausnützungsgrad des Materials steigt auf 5%. Bei nochmaliger Verdoppelung steigt die kritische Last noch schneller an. Bei einem Durchmesser ø = 32 mm, was einer Steigerung der ursprünglichen Querschnittfläche um den Faktor 64 bedeutet, ist die kritische Last 2500-mal grösser geworden als jene der Stütze mit einem Durchmesser von ø = 4 mm, und der Ausnützungsgrad erreicht nun 50%. Der Ausnützungsgrad einer Stütze mit l_{cr} = 800 mm und ø = 32 mm ist in der Tat identisch mit demjenigen, welcher weiter oben bei einer Stütze mit l_{cr} = 100 mm und ø = 4 mm, d.h. mit einer Schlankheit von 25, beobachtet wurde.

Dieser Sachverhalt ist in der Tabelle 15.1 für die Versuchsstütze mit vollem Kreisquerschnitt und einer kritischen Länge von 800 mm aus Stahl S235 zusammenfassend dargestellt.

Durchmesser ø [mm]	Fläche [mm²]	Erhöhung der Fläche	Kritische Last [N]	Erhöhung der kritischen Last	Ausnutzungsgrad
4	12.57		40		1%
8	50.27	x 4	585	x 15	5%
16	201.06	x 16	8328	x 215	18%
32	804.25	x 64	95222	x 2500	50%

Tabelle 15.1: Einfluss der Stützenabmessungen auf die kritische Last

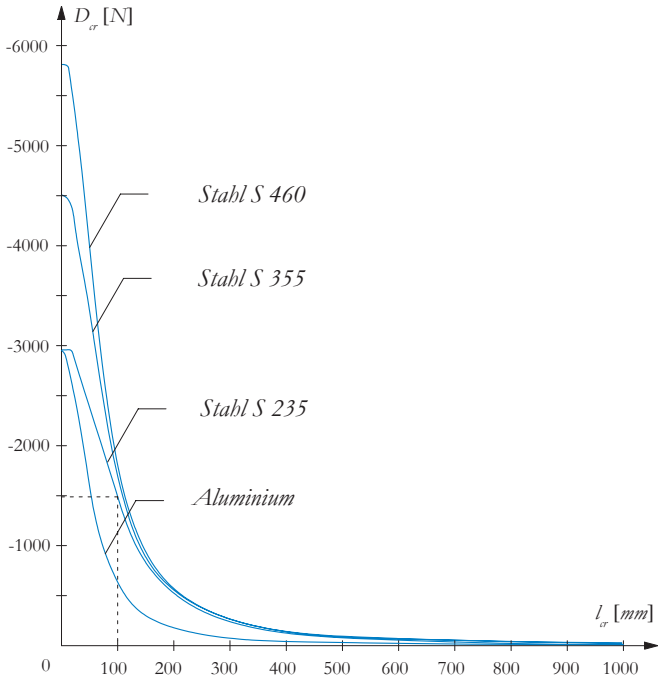


Bild 15.15: Kritische Last in Funktion der Stützenlänge in Abhängigkeit der Materialeigenschaften

15.7 Einfluss der Querschnittform der Stütze auf die kritische Last

Um die Biegesteifigkeit einer Stütze und damit auch ihren Widerstand gegen Knicken zu erhöhen, gibt es eine viel wirksamere Lösung als die Vergrösserung der Querschnittabmessungen infolge Erhöhung des Durchmessers. Wie bereits im Kapitel 14 im Zusammenhang mit der Steifigkeit von Balken gezeigt wurde, ist ein voller rechteckiger Querschnitt viel weniger effizient als ein I-Querschnitt bei gleicher Querschnittfläche und gleicher Höhe.

Eine Stütze weist eine *grössere Biegesteifigkeit* auf und die *kritische Last* steigt an *je grösser der Abstand zwischen dem Schwerpunkt der Zug- und der Druckzone* ist.
Im Bild 15.16 sind die kritischen Lasten von Stützen

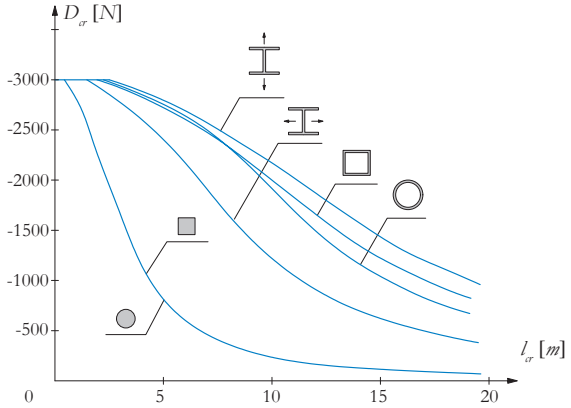


Bild 15.16: Vergleich der kritischen Lasten von Stützen mit unterschiedlichen Querschnitten und konstanter Querschnittsfläche

mit I-, Rechteck-, Hohl- und Vollquerschnitt mit identischer Querschnittfläche, und somit mit der gleichen Menge beanspruchten Materials, einander gegenübergestellt. Es ist klar ersichtlich, dass ein voller Querschnitt viel weniger effizient ist als beispielsweise ein Hohl-Querschnitt. Folglich ist es zweckmässig, bei der Wahl des Querschnitts die Art der Beanspruchung zu berücksichtigen. Bei auf Zug beanspruchten Tragelementen beeinflusst dagegen die Form des Querschnitts den Widerstand des Tragelementes nicht, so dass problemlos Vollquerschnitte gewählt werden können. Es ist zu beachten, dass I-Querschnitte, im Gegensatz zu Rechteck- oder Rohr-Querschnitten, je nach Richtung über verschiedene Steifigkeiten und Widerstände verfügen. Wie im Kapitel 14 gezeigt wurde, ist ein Balken mit I-Querschnitt unter vertikalen Lasten, bei vertikaler Anordnung der Flansche, viel weniger biegesteif als

derselbe Balken, der in einer konventionellen Art und Weise mit horizontalen Flanschen ausgeführt wird. Bei Stützen mit I-Querschnitt ist es also zweckmässig, die Knicklänge durch stabilisierende Elemente zu begrenzen, welche die Stütze halten und Verformungen in Richtung der schwachen Achse reduzieren. In der starken Richtung sind diese Elemente nicht notwendig oder können mit einem grösseren Abstand angeordnet werden, weil die grössere Knicklänge nicht massgebend wird.

Die Wahl des Querschnittes sollte unter Berücksichtigung der Beanspruchungsart erfolgen. In der Tabelle 15.3 sind diejenigen Querschnitte zusammengefasst, welche am häufigsten im Stahlbau verwendet werden. Auch im Stahlbetonbau und im Holzbau wird es ab einer gewissen Schlankheit notwendig, wirksame Querschnitte zu wählen, um so das Knicken zu verhindern

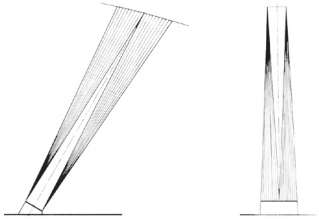


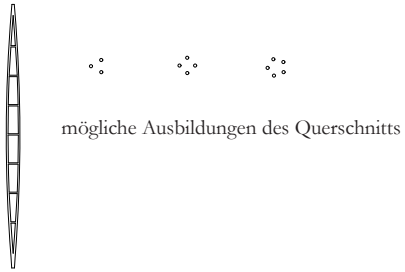


Bild 15.17: Sportpalast in Rom, 1957, Arch. + Ing. P.L. Nervi

15.8 Stützen mit veränderlichem Querschnitt

Durch Verwendung von *veränderlichen Querschnitten* können *optisch schlanke Stützen* entworfen werden. Wie die Stahlbetonstützen im Sportpalast in Rom (Bild 15.17), die Vierendeelstützen im Millenium Dome in London (Bild 15.18) und die Stahlstützen des 'Bigo' in Genua (Bild 15.19) zeigen, wird die Steifigkeit der Stütze in Abhängigkeit der Abweichung der Drucklinie von der verformten Stützenachse gewählt.

Diese Lösungen erlauben ausserdem einen eleganten Übergang zwischen den mittleren Bereichen mit grossen Querschnittsabmessungen und den gelenkig ausgebildeten Enden, in denen die inneren Kräfte zwingend durch die Gelenke verlaufen müssen.



mögliche Ausbildungen des Querschnitts



Bild 15.18: Vierendeelträger als Druckglieder im Millenium Dome, 1999, Arch. R. Rogers

15.9 Beulen

Die Regel, nach welcher es zweckmässig ist, Querschnitte mit dünnen Wänden und einer grossen Distanz zwischen der Zug- und der Druck-Zone zu benützen, um dem Knicken einer Stütze entgegenzuwirken, hat Grenzen. Wenn nämlich eine Stütze mit Kasten- oder Rohr-Querschnitt mit sehr dünnen Wänden belastet wird, erfolgt ein Phänomen *lokaler Instabilität* der *dünnen Wände* mit der Bezeichnung Beulen (Bild 15.20), bevor das Knickversagen der Stütze eintritt. Dieses Phänomen kann leicht experimentell untersucht werden, indem aus einem gekrümmten Papierblatt eine Stütze mit Rohr-Querschnitt gebaut wird. Belastet man dieses Modell, kann man feststellen, dass eine Art 'lokales seitliches Ausweichen' der dünnen Rohrwandung auftritt, bevor sich die Stütze durch Knicken vollständig versagt.

Beim Entwurf des Stützenquerschnitts ist es notwendig,



Bild 15.19: 'Bigo' in Genua für die 'Celebrazioni Colombiane', 1988-1992, Arch. R. Piano

einen guten *Kompromiss* zu finden *zwischen* einem vollen und massiven Querschnitt, der durch *Knicken* versagen kann, und einem Querschnitt mit zu dünnen Wänden, bei welchem *Beulen* auftreten könnte (Tabelle 15.2). Ein zweckmässiger Stützenquerschnitt einer hohlen Stütze weist ein Verhältnis der Stützenbreite zur Wandstärke zwischen 30 und 50 auf. Falls die Materialmenge von Stützen gering gehalten werden muss, sind *Fachwerke* oder *Vierendeelträger* vorzuziehen. Um die notwendige Stabilität in allen Richtungen zu gewährleisten, müssen diese Tragelemente mindestens drei Versteifungen aufweisen. Diese Lösungen werden oft angewendet, da sie auch eine grosse Transparenz gewährleisten.

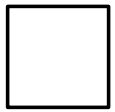
Knickgefährdeter Querschnitt	idealer Querschnitt	beulgefährdeter-Querschnitt
		

Tabelle 15.2: Querschnitte mit dem gleichen Materialverbrauch

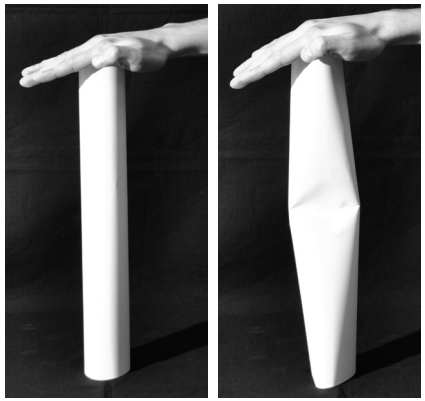


Bild 15.20: Beulen einer Stütze mit einem sehr dünnwandigen Querschnitt

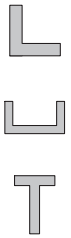
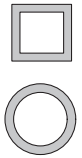
	nicht anwendbar
	wenig zweckmässig
	Verwendung nur für Stützen mit kleiner Schlankheit
	Verwendung nur für schwach beanspruchte Stützen
	effizienter Querschnitt, relativ einfache Verbindungen
	Sehr effiziente Querschnitte, aufwändigere Verbindungen

Tabelle 15.3: Wahl der Querschnitte von Stahlstützen

Literaturverzeichnis

Mechanik und Statik der Tragwerke; Analyse

- Pizzetti, G.: *Principi statici e forme strutturali*, UTET, Torino, 1980

Qualitatives und intuitives Verständnis des Verhaltens der Tragwerke; Konzepte

- Gordon, J. E.: *Structures, or why things don't fall down*, Plenum Press, New York, 1978 (Italienische Ausgabe: *Strutture, ovvero perché le cose stanno in piedi*, Mondadori, Milano, 1979)
- Gordon, J. E.: *The science of Structures and Materials*, Scientific American Books, New York, 1988 (Italienische Ausgabe: *Strutture sotto sforzo, Zanichelli*, Bologna, 1991)
- Nervi, P. L.: *Construire correttamente*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1965 (Französische Ausgabe: *Savoir costruire*, Le Linteau, Paris, 1997)
- Salvadori, M.; Heller, R.: *Structures in Architecture*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 1963 (Französische Ausgabe: *Structures et Architecture*, Eyrolles, Paris, 1976; Italienische Version: *Le strutture in architettura*, Etaslihbri, Milano, 1992)
- Torroja Miret, E.: *Razon y ser de los tipos structurales*, 1957 (jüngste Ausgabe: *Consejo Superior de Investigationes Cientificas*, Madrid, 2000; Französische Ausgabe: *Les structures architecturales, leur conception, leur réalisation*, Eyrolles, Paris, 1969)

Konzept auf grafischer Statik basierend

- Muttoni, A.: *L'art des structures*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2004
- Wolfe, W. S.: *Graphical Analysis*, Wexford College Press, 2006
- Zalewski, W.; Allen, E.: *Shaping Structures: Statics*, Ed. John Wiley and Sons, New York, 1998

Synergien zwischen Gestaltung und Tragwerk

- Ackermann, K.: *Tragwerke in der konstruktiven Architektur*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1988
- Billington, D. P.: *The Tower and the bridge, the new art of structural engineering*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983
- Deswarte, S.; Lemoine, B.: *L' architecture et les Ingénieurs*, Le Moniteur, 1997
- Mark, R.: *Light, Wind and Structure*, MIT Press, 1990
- Moch, E. B.: *The architecture of Bridges*, The Museum of Modern Art, New York, 1949
- Picon, A.: *L'art de l'ingénieur*, constructeur, entrepreneur, inventeur, Editions du Centre Pompidou/Le Monitor, Paris, 1997
- Robbin, T.: *Engineering a New Architecture*, Yale University Press, New Hawen and London, 1996
- Siegel, C.: *Strukturformen der modernen Architektur*, Callwey, München, 1960

Tragwerksarten

- Angerer, F.: *Bauen mit tragenden Flächen*, Callwey, München, 1960
- Heinle, E.; Leonhardt, F.: *Türme aller Zeiten, aller Kulturen*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1990
- Heinle, E.; Schlaich, J.: *Kuppeln aller Zeiten, aller Kulturen*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996
- Ishii, K.: *Membrane Structures in Japan*, SPS Publishing Company, Tokyo, 1995
- Joedicke, J.: *Schalenbau*, Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1962
- Leedy, W. C.: *Le volte a ventaglio*, Le Scienze, Milano, April 1983
- Leonhardt, F.: *Brücken/Bridges, Ästhetik und Gestaltung, Aestetics and Design*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1982
- Mierop, C.: *Skyscrapers, higher and higher*, Norma, Paris, 1995
- Otto, F.: *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Ullstein Verlag, 1966
- Rice, P.; Dutton, H.: *Le verre structurel*, Le Moniteur, Paris, 1995 (Deutsche Ausgabe: *Transparente Architektur, Glasfassaden mit Structural Glazing*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995)
- Stock, W. J.: *Europäischer Kirchenbau 1950-2000*, Pestel Verlag München Berlin London New York, 2003
- Van Beek, G. W.: *Archi e volte nell' antico Vicino Oriente*, Le Scienze, Milano, September 1987

Überlegungen von Ingenieuren und Architekten

- Diethlem, A.: *Picture Window House, Japan - Leben wie im Landschaftsbild*, steel doc 03/04
- Freyssinet, E.: *Un amour sans limite*, Editions du Linteau, Paris, 1993
- Nervi, P. L.: *Scienza o arte del construire?*, 1945, (Jüngste Ausgabe: *Cittàstudi Edizioni*, Milano, 1997)
- Nervi, P. L.: *Nuove strutture*, Edizioni di Comunità, Milano, 1963
- Piano, R.: *Giornale di bordo*, Passigli Editore, Firenze, 1997
- Rice, P.: *An Engineer imagines*, Artemis, London, 1994
- Wachsmann, K.: *Wendepunkt im Bauen*, Rowohlt, 1962

Ingenieure und Architekten

- Bill, M.: *Robert Maillart*, Artemis Verlag, Zürich, 1949
- Billington, D. P.: *Robert Maillart's Bridges, the art of engineering*, Princeton University Press, New Jersey, 1979
- Boaga, G.: *Ricardo Morandini*, Zanichelli Editore, Bologna, 1984
- Brownlee, D. B.; De Long, D. G.: *Louis I. Kahn: in the realm of archtecture*, Museum of contemporary Art, Los Angeles, 1991
- Buchanan, P.: *Renzo Piano Building Workshop*, Phaidon, London, 1993-1998
- Candela, F.; Segui Buenaventura, M.: *Felix Candela, arquitecto*, Ausstellungskatalog, Istituto Juan de Herrera, Madrid, 1994
- Desideri, P.: *Pier Luigi Nervi*, Zanichelli, Bologna, 1979 (Deutsch/Französische Ausgabe: *Pier Luigi Nervi*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1982)
- Dieste, E.: *Eladio Dieste 1943-1996*, Junta de Andalucia, Sevilla, 1998
- Dini, M.: *Renzo Piano*, Electa, Milano, 1983
- Dunster, D.: *Arups on Engineering*, Ernst&Sohn, Berlin, 1996
- Fernandes Ordonez, S. A.: *Eugène Freyssinet*, 2C Editions, Barcelona, 1979
- Fernandes Ordonez, S. A.; Navarro Vera, J. R.: *Eduardo Torroja, Ingenero*, Ediciones Pronaos, Madrid, 1999
- Guidot, R.; Guiheux, A.: *Jean Prouvé, constructeur*, Editions du Centre Pompidou, Paris, 1990
- Holgate, A.: *The art of structural engineering the work of Jörg Schlaich and his team*, Axel Menges, Stuttgart, 1997
- Imbesi, G.; Morandini, M.; Moschini, F.: *Riccardo Morandini, Innovazione, Tecnologia, Progetto*, Gangemi Editore, Roma, 1995
- Killer, J.: *Die Bauwerke der Baumeister Grubenmann*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1985
- Loyrette, H.: *Gustave Eiffel*, Deutsche Verlags-Anstalt, Fribourg, 1985
- Marrey, B.: *Nicolas Esquillan, un ingénieur d'enterprise*, Picard éditeur, Paris, 1992
- Nardi, G.: *Angelo Mangiarotti*, Maggioli Editore, Rimini, 1997
- Pawley, M.: *Norman Foster*, Rizzoli, Milano, 1999 (Englische Ausgabe: *Norman Foster*, Thames&Hudson, London, 1999)
- Pedretti, C.: *Leonardo Architetto*, Electa, Milano, 1999
- Pfeiffer, B. B.: *Frank Lloyd Wright*, Taschen, Köln, 1991
- Polano, S.: *Santiago Calatrava*, Electa, Milano, 1996 (Deutsche Ausgabe: *Santiago Calatrava*, Deutsche Verlags-Anstalt, München, 1997)
- Ramm, E.; Schunk, E.: *Heinz Isler – Schalen*, Krämer, 1986
- Rui-Wamba, J. et al.: *Eugène Freyssinet, Un ingeniero revolucionario*, Fundacion Esteyco, 2003
- Schulze, F.: *Mies van der Rohe*, Museum of Modern Art, New York, 1989
- Stüssi, F.: *Othmar H. Amman, Sein Beitrag zur Entwicklung des Grossbrückenbaus*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1974
- Suchov, V.; Graefe, R.; Gappoev, M.; Pertschi, O.: *Die Kunst der sparsamen Konstruktion*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1992
- Villa, A.: *Silvano Zorzi*, Electa, Milano, 1995
- Von der Mühl, H. R.: *Kenzo Tange*, Zanichelli, Bologna, 1981

Geschichte der Konstruktion

- Adam, J.-P.: *La construction romaine, matériaux et techniques*, Picard, Paris, 1984 (Italienische Ausgabe: *L'arte di construire presso i romani, materiali e tecniche*, Longanesi, Milano, 1988)
- Jesberg, P.: *Die Geschichte der Ingenieurbaukunst*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996
- Lamprecht, H.-O.: *Opus caementitium, Bautechnik der Römer*, Beton-Verlag, Düsseldorf, 1984
- Peters, T. F.: *Transition in engineering, Guillaume Henri Dufour and early 19th century cable suspension bridges*, Birkhäuser, Basel, 1987

In diesem Band behandelte Tragwerke

- Boesiger, W.: *Le Corbusier Œuvre complete, 1952-1957*, Les Editions d' Architecture, Zürich, 1970
- Louis Kahn, *La costruzione del Kimbell Art Museum*, Accademia di Architettura, Mendrisio, 1997
- De Bures, C.: *La tour de 300 mètres*, Editions André Delcourt, Paris, 1998
- Eggen, A. P.; Sandaker, B. N.: *Stahl in der Architektur*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996
- Lyall, S.: *Masters of Structures*, Kohlhammer, Stuttgart, 2002
- McKean J., *Crystal Palace*, Paxton and Fox, Phaidon, London, 1994
- Piano R., Rogers R., *Du Plateau Beaubourg au Centre Georges Pompidou*, Le Moniteur, Paris, 1987
- Vischer, J.; Hilbersheimer, L.: *Beton als Gestalter*, Julius Hofmann, Stuttgart, 1928